Der Gerstenkomplex der Milnor K-Theorie

Diplomarbeit

vorgelegt am
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität, Mainz

Moritz C. Kerz

Mainz, im September 2005

Inhaltsverzeichnis

Vorwort . . . 5
Notation . . . 7

1 Klassische Milnor K-Theorie **9**
1.1 Grundlagen . . . 9
1.2 Diskrete Bewertungen und das zahme Symbol . . . 12
1.3 Funktionenkörper . . . 13
1.4 Der Transfer I . . . 15
1.5 Der Transfer II . . . 17

2 Verallgemeinerung auf lokale Ringe **21**
2.1 Die Gruppe $K_n^t(A)$ . . . 21
2.2 Beweis von 2.1.3 . . . 23
2.3 Der Transfer . . . 25

3 Der Gerstenkomplex **29**
3.1 Konstruktion I . . . 30
3.2 Konstruktion II . . . 34
3.3 Chowgruppen mit Koeffizienten . . . 36
3.4 Die vier Standardabbildungen . . . 37
3.5 Kompatibilitäten . . . 38
3.6 Die Exaktheit . . . 39
3.7 Endliche Körper . . . 41

4 Die Gerstenvermutung **45**
4.1 Der Beweis von Elbaz-Vincent und Müller-Stach . . . 46
4.2 Der Beweis von Gabber I . . . 48
4.3 Der Beweis von Gabber II . . . 50

5 Ausblick **53**
5.1 Die Gerstenvermutung . . . 53
5.2 Endliche Körper . . . 54

6 Anhang (Algebra) **57**
6.1 Faktorisierungslemma 57
6.2 EGA IV 58
Literaturverzeichnis 58

Vorwort

> By that adorable decree,
> That Chaos cloth'd with Symmetry;
> By that resistless Pow'r that made
> refulgent brightness start from Shade.
>
> G.F. Händel, S. Humphreys *Deborah*

Ziel dieser Arbeit ist einerseits die ausführliche Darstellung der Grundlagen der Milnor K-Theorie und des zugehörigen Gerstenkomplexes, andererseits das nötige Fundament für einen Beweis der Gerstenvermutung zu skizzieren. Letztere besagt, dass $K_n^M(A) \to K_n^M(Q(A))$ injektiv ist für einen lokalen, regulären, äquicharakteristischen Ring A mit unendlichem Restkörper.
Im Einzelnen enthält diese Arbeit folgende neue Ergebnisse

1. Das grundlegendste ist die Verallgemeinerung der Milnor Sequenz auf die K-Theorie lokaler Ringe in Kapitel 2.

2. Für endliche, unverzweigte Erweiterungen von semi-lokalen, regulären Ringen mit unendlichen Restkörpern werden Normen für die Milnor K-Theorie definiert.

3. Mit Hilfe der Norm kann man das Theorem von Gabber, Elbaz-Vincent und Müller-Stach auf lokale, äquicharakteristische, reguläre Ringe mit genügend großem Restkörper verallgemeinern.

4. Die Beweise von Elbaz-Vincent/Müller-Stach und Gabber werden mit Hilfe der Milnor K-Theorie von lokalen Ringen vereinfacht.

5. Es wird ein Beweis der Gerstenvermutung skizziert.

In Kapitel 1 wird eine Übersicht über die elementare Milnor K-Theorie von Körpern gegeben. Behandelt werden Milnors exakte Sequenz und die Konstruktion des Transfers nach Bass-Tate-Kato. Besonderes Gewicht wird auf die Beweise gelegt, die in der existierenden Literatur nur angeschnitten werden.
Kapitel 2 skizziert eine Verallgemeinerung der Konstruktion der Milnorsequenz auf lokale, faktorielle Ringe. Kurz diskutiert wird auch der sich daraus

ergebende Transfer für lokale, reguläre Ringe und geeignete Ringerweiterungen.

In Kapitel 3 schließt sich die Konstruktion des Gerstenkomplexes an. Es werden zwei Varianten dargestellt, nämlich Katos und die über höhere Chowgruppen. Schließlich wird die Exaktheit des Gerstenkomplexes gezeigt.

Kapitel 4 behandelt die Frage, ob die kanonische Abbildung von der Milnor K-Theorie eines lokalen, regulären Ringes in die motivische Cohomologie surjektiv ist. Für den Fall von glatten, lokalen Ringen über einem unendlichen Körper werden zwei unterschiedliche Beweise dieser Aussage gegeben.

Schließlich behandelt Kapitel 5 einige Ansätze zum Beweis der Gersten-Beilinson Vermutung, d.h. der Frage, ob die oben angesprochene Abbildung von der Milnor K-Theorie in die motivische Cohomologie injektiv ist.

Mein Dank gilt Prof. Dr. Müller-Stach. Erst durch seine Ideen und Anregungen sind die in dieser Arbeit erhaltenen Resultate möglich geworden. Außerdem bedanke ich mich bei Ralf Gerkmann, Oliver Petras und Jens Piontkowski für viele Diskussionen und ihre Unterstützung.

Während der Anfertigung dieser Arbeit wurde ich von der Studienstiftung des deutschen Volkes unterstützt.

Notation

Die Notation in dieser Arbeit entspricht weitgehend der EGA-Norm. Die einzigen Abweichungen sind:
Der Begriff Schema wird in seiner Bedeutung der neueren Springer Version von [EGA I] angeglichen und ersetzt den Begriff des Präschemas. Wir verwenden den Begriff glatt auch für beliebige formal glatte Morphismen von semi-lokalen Schemata. Eine Algebra bzw. das zugehörige Schema über einem Körper heißt von geometrischem Typ, falls sie in EGA-Sprache *essentiellement de type fini* ist.

Falls eine lokal-abgeschlossene Teilmenge eines Schemas betrachtet wird, sei diese bei Bedarf mit der reduzierten Unterschemastruktur versehen.
Für einen Ring A sei $Q(A)$ der zugehörige vollständige Quotientenring. Alle vorkommenden Ringe seien noethersch, kommutativ und unital und ab Kapitel 3 seien alle Ringe und Schemata sogar exzellent, solange nicht explizit das Gegenteil angenommen wird.

Kapitel 1

Klassische Milnor K-Theorie

In diesem Kapitel werden die Milnor K-Gruppen von kommutativen Ringen eingeführt und einige klassische Resultate im Spezialfall von Körpern bewiesen. Ich folge dabei Milnor [Milnor69] und Bass, Tate [BT73]. Die größte Schwierigkeit bereitet hier die Konstruktion eines Transfers nach [BT73], [Kato80].

1.1 Grundlagen

Sei A im Folgenden ein kommutativer, unitaler Ring, **RING** die Kategorie solcher Ringe und unitaler Homomorphismen und $\mathbf{RING_{gr}}$ die Kategorie der graduiert kommutativen, unitalen Ringe und graduierter Homomorphismen.

1.1.1 Definition

Der Funktor K_*^M ist wie folgt definiert.

$$K_*^M : \mathbf{RING} \longrightarrow \mathbf{RING_{gr}}$$
$$K_*^M(A) = \mathcal{T}_*^{\mathbb{Z}} A^* / (\{x \otimes (1-x) | \, x, 1-x \in A^*\} \cup \{x \otimes (-x) | \, x \in A^*\})$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{T}_*^{\mathbb{Z}} A^*$ die graduierte $\mathbb{Z}$-Tensoralgebra über der abelschen Gruppe der Einheiten von A. Das Tensorprodukt von $x_1, \ldots, x_n$ in $K_*^M(A)$ werde mit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bezeichnet. Die aus dem Tensorprodukt herausdividierten Relationen heißen Steinbergrelationen.

Es ist nicht unmittelbar ersichtlich, wozu eine solche Definition taugt. Es soll hier lediglich darauf hingewiesen werden, dass sich die Milnorschen K-Gruppen als wichtiges Hilfsmittel bei der Klassifikation von quadratischen Formen über einem Körper F herausstellen (siehe z.B. [Pfis00], [Milnor69]);

der Ring $K_*^M(F)/2K_*^M(F)$ klassifiziert in gewisser Weise die anisotropen quadratischen Formen über F.
In den folgenden Lemmata fassen wir einige fundamentale Eigenschaften der Milnor K-Gruppen zusammen.

1.1.2 Lemma

Seien $\xi \in K_n^M(A)$ und $\zeta \in K_m^M(A)$. Dann gilt

$$\xi\zeta = (-1)^{mn}\zeta\xi$$

Beweis. Da $K_1^M(A)$ das Ideal $K_{>0}^M(A)$ erzeugt, genügt es mit $a, b \in A^*$ anzunehmen, dass $\xi = \{a\}$ und $\zeta = \{b\}$.

$$\begin{aligned} \{a,b\} + \{b,a\} &= \{a,-a\} + \{a,b\} + \{b,a\} + \{b,-b\} \\ &= \{a,-ab\} + \{b,-ab\} \\ &= \{ab,-ab\} = 0 \end{aligned}$$

□

1.1.3 Lemma

Für alle $a \in A^*$ gilt

$$\{a\}^2 = \{a\}\{-1\} = \{-1\}\{a\}\,.$$

Beweis. $\{a\}^2 = \{a\}(\{-1\} + \{-a\}) = \{a,-1\} + \{a,-a\} = \{a,-1\}$. □

1.1.4 Lemma

Für $a_1, a_2, a_3 \in A^*$ mit $a_1 + a_2 \in A^*$ gilt, falls $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ oder $a_1 + a_2 + a_3 = 1$,

$$\{a_1, a_2, a_3\} = 0 \in K_3^M(A)\,.$$

Beweis. Da

$$\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_1+a_2} = 1$$

gilt

$$\{\frac{a_1}{a_1+a_2}, \frac{a_2}{a_1+a_2}\} = 0\,.$$

Somit ergibt sich das Lemma nach Rechtsmultiplikation mit a_3, beachte $\{a_1 + a_2, a_3\} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= (\{a_1\} - \{a_1 + a_2\})(\{a_2\} - \{a_1 + a_2\})\{a_3\} \\ &= \{a_1, a_2, a_3\} \end{aligned}$$

□

1.1.5 Proposition

Über einem Körper F folgen die Relationen $\{a, -a\} = 0$ aus den Relationen $\{a, 1-a\} = 0$.[1] *Genauer gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathcal{T}_*^{\mathbb{Z}} F^* / (\{x \otimes (1-x) |\, x, 1-x \in F^*\}) \xrightarrow{\sim} K_*^M F\ .$$

Beweis. Für $a \in F^*$, $a \neq 0$ ist $-a = (1-a)/(1-a^{-1})$ und

$$\begin{aligned} \{a, -a\} &= \{a, 1-a\} - \{a, 1-a^{-1}\} \\ &= \{a, 1-a\} + \{a^{-1}, 1-a^{-1}\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

in $\mathcal{T}_*^{\mathbb{Z}} F^* / (\{x \otimes (1-x) |\, x, 1-x \in F^*\})$. □

1.1.6 Beispiele

(i) Für einen beliebigen Ring A ist $K_0^M(A) = \mathbb{Z}$, $K_1^M(A) = A^*$.
(ii) Für einen lokalen Ring A mit mindestens sechs Elementen im Restkörper ist

$$K_2^M(A) \cong H_2([GL(A), GL(A)], \mathbb{Z})\ ,$$

wobei $GL(A)$ der direkte Limes $\lim_{\rightarrow} GL_n(A)$ ist. H_* ist die diskrete Gruppenhomologie (siehe z.B. [HilSt97]). Einen Beweis findet man in [vdKal77].
(iii) $K_n^M(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2$ für $n > 2$. $K_2^M(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/2 \oplus \bigoplus_p (\mathbb{Z}/p)^*$, wobei p die ungeraden Primzahlen durchläuft (siehe [Milnor69], [BT73]).

1.1.7 Proposition

Falls F ein endlicher Körper ist und $n \geq 2$, gilt $K_n^M(F) = 0$.

Beweis. Man reduziert auf den Fall $n = 2$. Falls F die Charakteristik 2 hat, ist $x \mapsto x^2$ ein Körperisomorphismus. Da der Körper endlich ist, gibt es ein

[1] Dies gilt auch für einen lokalen Ring mit unendlichem Restkörper.

$i > 0$, so dass $a^{2^i} = a$ ist für alle $a \in F^*$. Wähle a_0 als einen Erzeugenden der Gruppe F^*. Es genügt nun zu beobachten, dass

$$\{a_0, a_0\} = \{a_0, a_0^{2^i}\} = \{a_0, (-a_0)^{2^i})\} = 2^i\{a_0, -a_0\} = 0\,.$$

Falls F Charakteristik ungleich 2 hat, beachte dass $K_n^M(F)$ höchstens 2-Torsion hat. Denn sei $a_0 \in F^*$ ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe von F; mit $i, j \in \mathbb{Z}$ gilt $2\{a_0^i, a_0^j\} = 2ij\{a_0, a_0\} = 2ij\{a_0, -1\} = 0$. Es ist dann klar, dass $\{a, b\} = 0$, sobald a oder b ein Quadrat ist. Da sich in der multiplikativen Gruppe eines endlichen Körpers zwei Nichtquadrate nur um ein Quadrat unterscheiden, genügt es zu zeigen, dass Nichtquadrate $a, b \in F^*$ existieren mit $\{a, b\} = 0$. Dies ist der Fall, da die Abbildung $x \mapsto 1 - x$ die Menge $F^* - \{1\}$ in sich überführt und es in $F^* - \{1\}$ weniger Quadrate als Nichtquadrate gibt. □

In späteren Kapiteln wird uns auch die lokale Version der Milnor K-Gruppen interessieren. Deshalb geben wir folgende

1.1.8 Definition

Die Zariskigarbe $\mathcal{K}_n^M$ ist die zur Prägarbe auf der Kategorie der Schemata

$$U \mapsto K_n^M(H^0(U, \mathcal{O}_U))$$

zugeordnete Garbe.

1.2 Diskrete Bewertungen und das zahme Symbol

Sei F im Folgenden ein Körper mit einer diskreten Bewertung v und Restkörper $\bar{F}$. $\pi \in F^*$ sei ein Primelement.

1.2.1 Lemma

Es existiert genau ein Gruppenhomomorphismus (unabhängig von π) $\partial_v : K_n^M(F) \to K_{n-1}^M(\bar{F})$ mit $\partial_v\{\pi, u_2, \dots u_n\} = \{\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, wenn man beachtet, dass $\{\pi\}^r = \{\pi\}\{-1\}^{r-1}$ ist und dass der K-Ring antikommutativ ist.
Die Existenz ist schwieriger zu zeigen. Wir gehen nach einer Idee Serres vor. Fixiere dafür π und betrachte den graduiert-kommutativen Ring $K_*^M(\bar{F})[\xi]$, der als Modul frei vom Rang zwei über $K_*^M(\bar{F})$ ist mit Erzeuger ξ vom Grad eins und Relation $\xi^2 = \xi\{-\bar{1}\}$. Betrachte weiter den Ringhomomorphismus $\theta_\pi : K_*^M(F) \to K_*^M(\bar{F})[\xi]$, $\{\pi^i u\} \mapsto i\,\xi + \{\bar{u}\}$.
Wie man leicht sieht, gibt dies tatsächlich einen wohldefinierten Morphismus von graduierten Ringen. Auf Grund der universellen Eigenschaft des

Tensorproduktes muss man lediglich die Verträglichkeit mit den Steinbergrelationen überprüfen. Für $i > 0$ und $u \in F^*$ gilt

$$\theta_\pi\{\pi^i u, 1 - \pi^i u\} = (i\,\xi + \{\bar{u}\})\{\bar{1}\} = 0\,.$$

Für $i < 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\theta_\pi\{\pi^i u, 1 - \pi^i u\} &= \theta_\pi\{\pi^i u, \pi^i(\pi^{-i} - u)\} \\
&= (i\xi + \{\bar{u}\})(i\xi + \{-\bar{u}\}) \\
&= i^2\xi\{-\bar{1}\} + i\xi\{-\bar{u}\} - i\xi\{\bar{u}\} + \{\bar{u}, -\bar{u}\} \\
&= i\xi\{\bar{u}\} - i\xi\{\bar{u}\} = 0\,.
\end{aligned}$$

Für $i = 0$ können wir nach dem bereits Bewiesenen annehmen, dass $1 - \bar{u} \in (F[t]/(\pi))^*$ ist. In diesem Fall ist

$$\theta_\pi\{u, 1 - u\} = \{\bar{u}, 1 - \bar{u}\} = 0\,.$$

Mit $\theta_\pi(\alpha) = \psi_\pi(\alpha) + \xi\,\partial(\alpha)$ erhalten wir den gewünschten Gruppenhomomorphismus ∂. □

Man bezeichnet ∂_v auch als das zahme Symbol.

1.2.2 Lemma

Für festes π gibt es genau einen Morphismus von graduierten Ringen $\psi_\pi : K_*^M(F) \to K_*^M(\bar{F})$, mit $\psi_\pi\{\pi^i u\} = \{\bar{u}\}$.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist wieder klar. Die Konstruktion ist im Beweis des vorhergehenden Lemmas enthalten. □

Man beachte, dass ψ_π im Gegensatz zu ∂_v von der Wahl des Primelementes π zu v abhängt.

1.3 Funktionenkörper

Sei F ein beliebiger Körper. Man betrachte den Körper $F(t)$ der rationalen Funktionen auf $\mathbb{P}^1_F$. Den nicht-trivialen diskreten Bewertungen v von $F(t)/F$ entsprechen die normierten irreduziblen Polynome $\pi \in F[t]$ und der Punkt im Unendlichen v_∞ [Bourbaki]. Als feste Primelemente zu den Bewertungen v werden die normierten irreduzibelen Polynome π_v gewählt, $\pi_{v_\infty} = 1/t$. Wir haben die im vorigen Abschnitt konstruierten Abbildungen $\partial_v : K_n^M(F(t)) \to K_{n-1}^M(F[t]/(\pi_v))$ und $\psi_v : K_n^M(F(t)) \to K_n^M(F[t]/(\pi_v))$ für $v \neq v_\infty$, $\partial_{v_\infty} : K_n^M(F(t)) \to K_{n-1}^M(F)$ und $\psi_{v_\infty} : K_n^M(F(t)) \to K_n^M(F)$. Milnor, Bass und Tate bewiesen folgendes zentrales Theorem, dessen Beweis den Rest dieses Abschnittes füllt.

1.3.1 Theorem

Aus den eben konstruierten Morphismen ergibt sich die spaltende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow K_n^M(F) \longrightarrow K_n^M(F(t)) \longrightarrow \bigoplus_\pi K_{n-1}^M(F[t]/(\pi)) \longrightarrow 0\,.$$

Beweis. Die Exaktheit an der ersten Stelle ist klar, da ψ_{v_∞} ein Linksinverses zu $K_n^M(F) \to K_n^M(F(t))$ ist.
Um die Exaktheit an der zweiten und dritten Stelle zu beweisen, filtriert man die Gruppen $K_n^M(F(t))$ und $\bigoplus_\pi K_{n-1}^M(F[t]/(\pi))$ über den Grad. Genauer: Sei $L_d \subset K_n^M(F(t))$ die von $\{f_1,\dots,f_n\}$ erzeugte Untergruppe mit Polynomen $f_1,\dots,f_n$ vom Grad $\le d$.
Nach dem eben Gesagten gilt $L_0 = K_n^M(F)$.
Sei nun π ein normiertes irreduzibeles Polynom vom Grad d. Jedes Element $\bar g \in F[t]/(\pi)$ wird eindeutig von einem $g \in F[t]$ mit $deg(g) < d$ dargestellt.

1.3.2 Lemma

Es existiert genau ein Homomorphismus

$$h_\pi : K_{n-1}^M F[t]/(\pi) \to L_d/L_{d-1}\,,$$

der $\{\bar g_2,\dots,\bar g_n\}$ nach $\{\pi, g_2,\dots,g_n\}$ schickt.

Beweis. h_π existiert sicherlich als Abbildung von $(F[t]/(\pi))^*\times\cdots\times(F[t]/(\pi))^*$ nach L_d/L_{d-1}. Wir müssen zeigen, dass diese Abbildung multilinear ist. Sei also $g_2 = \pi\, f + g_2'\, g_2''$ mit g_2, g_2', g_2'', f vom Grad kleiner d. Falls $f \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\pi f}{g_2} + \frac{g_2' g_2''}{g_2} \\ 0 &= (\{\pi\} + \{f\} - \{g_2\})(\{g_2'\} + \{g_2''\} - \{g_2\})\,. \end{aligned}$$

Modulo L_{d-1} ergibt sich nach Rechtsmulitplikation mit $\{g_3,\dots,g_n\}$

$$\{\pi\}(\{g_2'\} + \{g_2''\} - \{g_2\})\{g_3,\dots,g_n\} \equiv 0\ (L_{d-1})\,.$$

Der Fall $f = 0$ ist trivial. Die Verträglichkeit mit den Steinbergrelationen ist es gleichfalls. □

1.3.3 Lemma

Die Homomorphismen ∂_{v_π} geben einen Isomorphismus

$$L_d/L_{d-1} \xrightarrow{\sim} \oplus_\pi K_{n-1}^M(F[t]/(\pi))\,,$$

wobei π alle normierten, irreduziblen Polynome vom Grad d durchläuft.

Beweis. ∂_{v_π} faktorisiert offenbar über L_d/L_{d-1}. Außerdem ist klar, dass $\partial_{v_\pi} \circ h_\pi = id$ und $\partial_{v'_\pi} \circ h_\pi = 0$ für $\pi' \neq \pi$, $deg(\pi') = d$, π' normiert. Somit ist

$$\oplus_\pi h_\pi : \oplus_\pi K_{n-1}^M(F[t]/(\pi)) \to L_d/L_{d-1}$$

ein Rechtsinverses zu

$$\oplus_\pi \partial_\pi : L_d/L_{d-1} \to \oplus_\pi K_{n-1}^M(F[t]/(\pi)) \, .$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\oplus_\pi h_\pi$ surjektiv ist.
Der Einfachheit halber zeigen wir, dass

$$\{f, f', g_3, \dots, g_n\} \in K_n^M(F(t))$$

im Bild von $\oplus_\pi h_\pi$ ist, wobei f, f' bzw. $g_1, \dots, g_n$ Polynome vom Grad d bzw. kleiner d sind. Wähle $a \in F^*$ mit $g := f + a\, f'$ vom Grad kleiner d. Falls g verschwindet, ist die Reduktion klar. Andernfalls gilt nach $1 = \frac{f}{g} + \frac{a\, f'}{g}$

$$\begin{aligned} 0 &= \{\frac{f}{g}, \frac{a\, f'}{g}, g_3, \dots, g_n\} \\ &= (\{f\} - \{g\})(-\{\frac{g}{a}\} + \{f'\})\{g_3, \dots, g_n\} \\ &\equiv \{f, f', g_3, \dots, g_n\} \mod \; < L_{d-1}, \mathrm{im}(\oplus h_\pi) > \; . \end{aligned}$$

□

Von hier aus folgert man mit einem Standardargument, dass

$$K_n^M(F(t))/L_0 \xrightarrow{\sim} \oplus_\pi \, K_{n-1}^M(F[t]/(\pi))$$

ein Isomorphismus ist, was äquivalent zur Aussage des Theorems ist. □

1.4 Der Transfer I

In diesem Abschnitt geben wir eine axiomatische Beschreibung und die Konstruktion des Transfers, man spricht auch von der Norm oder Corestriktion, für die Milnor K-Theorie. Der Transfer ist ein Homomorphismus

$$N_{F'/F} : K_n^M(F') \to K_n^M(F)$$

für eine endliche Körpererweiterung $F \subset F'$. Sämtliche Resultate in diesem Abschnitt sind von Bass und Tate. Allerdings konnten sie in [BT73] nicht zeigen, dass die folgende Konstruktion unabhängig von einer Wahl von Erzeugenden von F' über F ist. Erst Kato hat diese wesentliche Eigenschaft in [Kato80] bewiesen.
Der folgende Satz beschreibt die Existenz und Eindeutigkeit eines Transfers. Die wichtigsten Eigenschaften werden im nächsten Abschnitt dargestellt.

1.4.1 Theorem

Es existiert genau ein Transfer für die Milnor K-Theorie. D.h. zu jeder endlichen Körpererweiterung F'/F kann man nur auf eine Weise einen Homomorphismus (vom Grad Null) von graduierten Gruppen $N_{F'/F} : K_*^M(F') \to K_*^M(F)$ zuordnen, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. ***Funktorialität:*** *Für endliche Körpererweiterungen F''/F', F'/F gilt $N_{F/F} = id$ und $N_{F'/F} \circ N_{F''/F'} = N_{F''/F}$.*

2. ***Reziprozität:*** *Für $x \in K_*^M(F(t))$ gilt*

$$\sum_v N_{F(v)/F}(\partial_v(x)) = 0\,.$$

Dabei läuft v über alle diskreten Bewertungen von $F(t)/F$ und $F(v)$ bezeichnet die zugehörigen Restkörper.

Wir wollen dieses Theorem hier nicht ausführlich beweisen, da dies den Rahmen sprengen würde. Der an Details interessierte Leser sei besonders auf [Ker90] verwiesen.

Zunächst beachte, dass nach Theorem 1.3.1

$$K_*^M(F(t))/K_*^M(F) \longrightarrow \oplus_{v \neq v_\infty} K_*^M(F(v))$$

ein Isomorphismus ist. Dies ermöglicht es uns, die Norm N für die endlichen Körpererweiterungen $F(v)/F$ für eine Bewertung $v \neq v_\infty$ von $F(t)$ so zu definieren, dass das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc}
K_*^M(F(t))/K_*^M(F) & \xrightarrow{(\partial_v)_v} & \oplus_{v \neq v_\infty} K_*^M(F(v)) \\
{\scriptstyle -\partial_{v_\infty}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle N} \\
K_*^M(F) & = & K_*^M(F)
\end{array}$$

Dies ist offenbar genau das Reziprozitätsgesetz.
Da sich jede endliche Körpererweiterung aus primitiven Erweiterungen zusammensetzen lässt, kann man durch diese Konstruktion die allgemeine Norm gewinnen. Die entscheidende Frage ist allerdings, ob die Norm unabhängig von der Wahl eines entsprechenden Erzeugendensystems für die betrachtete endliche Körpererweiterung ist.
Man zeigt dies grob gesprochen, indem man auf den Fall reduziert, die bis dahin noch nicht wohldefinierte Norm $N_{F'/F}$ von einem Element der Form

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in K_n^M(F')$$

zu nehmen, wobei $x_1 \in F'$ und $x_2, \ldots x_n \in F$ sei. In diesem Fall hat man

$$N_{F'/F}(x) = \{N_{F'/F}(x_1), x_2, \ldots, x_n\}$$

mit der gewöhnlichen Norm rechts, was die Eindeutigkeit zeigt.
Dieses Reduktionsverfahren wird beim Beweis praktisch aller elementarer Eigenschaften des Transfers benutzt. Im nächsten Abschnitt wird es anhand eines Beispiels genauer vorgestellt.

1.4.2 Proposition

Unter der natürlichen Identifikation $F^* = K_1^M(F)$ für einen Körper F ist die K-theortische Norm

$$N_{F'/F} : K_1^M(F') \to K_1^M(F)$$

gleich der gewöhnlichen Norm von $F'^* \to F^*$ für eine endliche Körpererweiterung $F \subset F'$.

Beweis. Siehe [BT73] Theorem 5.6. □

1.5 Der Transfer II

In diesem Abschnitt sammeln wir einige elementare Eigenschaften der Norm in der Milnor K-Theorie, die für die Verträglichkeit des Gerstenkomplexes mit Pullback und Pushforward entscheidend sind. Da man in der Literatur für einige der folgenden Sätze keine guten Referenzen findet – obwohl sie im Wesentlichen in [BT73] und [Kato80] enthalten sind – , ist dieser Abschnitt ausführlicher als der letzte.
Wir nehmen im Folgenden an, dass eine Norm mit den Eigenschaften aus dem letzten Abschnitt bereits konstruiert ist.
Zunächst führen wir eine hilfreiche Notation ein:

1.5.1 Definition

Sei $i : F \subset F'$ eine beliebige Körpererweiterung. Setze

$$i_* : K_*^M(F) \to K_*^M(F')$$

als den durch i induzierten Homomorphismus.
Nehme nun zusätzlich an, i sei eine endliche Körpererweiterung. Setze

$$i^* = N_{F'/F} : K_*^M(F') \to K_*^M(F) .$$

1.5.2 Lemma

Sei $i : F \subset F'$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad d. Dann gilt

$$i^* \circ i_* = d\,.$$

Hier steht d für Multiplikation mit d.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Definition des Transfers (siehe letzter Abschnitt). □

1.5.3 Lemma

Sei $i : F \to F'$ eine endliche Körpererweiterung und v' eine diskrete Bewertung von F'. Bezeichne v die Einschränkung von v' auf F. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(F') & \xrightarrow{\partial_{v'}} & K_{n-1}^M(F'(v')) \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle e_{v'/v}} \\ K_n^M(F) & \xrightarrow[\partial_v]{} & K_{n-1}^M(F(v)) \end{array}$$

Hier ist $e_{v'/v}$ der Verzweigungsgrad von v' über v.

Beweis. Man kann sich wieder darauf beschränken, die Kommutativität für ein Element $\{\pi_v\} \in K_1^M(F)$ zu zeigen (π_v bezeichne wie üblich ein Primelement von v). □

1.5.4 Proposition

Sei $F \subset F'$ eine endliche Körpererweiterungen und $F \subset E$ eine beliebige Erweiterung. Seien die Primideale von $R = F' \otimes_F E$ mit p_i bezeichnet. Seien $l_i = length_{R_{p_i}}(R_{p_i})$, $F_i = R/p_i$ und $\phi_i : F' \to F_i$ die Einbettungen. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(F') & \xrightarrow{(l_i\,\phi_{i\,*})} & \oplus_i K_n^M(F_i) \\ {\scriptstyle N_{F'/F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (N_{F_i/E})} \\ K_n^M(F) & \longrightarrow & K_n^M(E) \end{array}$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $F' = F[t]/(f)$, mit f einem irreduziblen, normierten Polynom. Um die Norm auf der linken Seite im obigen Diagramm zu berechnen, wähle zu einem Element $x \in K_n^M(F')$ ein $y \in K_{n+1}^M(F(t))$, so dass $\partial_f(y) = x$ und $\partial_g(y) = 0$ für jedes andere irreduzible, normierte

Polynom $g \in F[t]$. Dann ist $N_{F'/F}(x) = -\partial_{v_\infty}(y)$.
Andererseits kann man y auch als Element von $E(t)$ auffassen. In unserem Fall entsprechen den Idealen p_i die irreduziblen, normierten Faktoren $f_i \in E[t]$ von f; $F_i = E[t]/(f_i)$. Nach Lemma 1.5.3 gilt $\partial_{f_i}(y) = l_i\, \phi_i(x)$ und $\partial_g(y) = 0$ für g verschieden von den f_i. Damit kann man die Summe der Normen auf der rechten Seite des obigen Quadrates durch $-\partial_{v_\infty}(y) \in K_n^M(E)$ berechnen. Nach 1.5.3 zeigt dies die Proposition. $\square$
Die nächste Proposition ist deutlich komplizierter.

1.5.5 Proposition

Sei $F \subset F'$ eine endliche Körpererweiterung und v eine diskrete Bewertung von F, v_i seien sämtliche Erweiterungen von v auf F'. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} K_n^M(F') \arrow[r, "(\partial_{v_i})"] \arrow[d, "N_{F'/F}"'] & \oplus_i K_{n-1}^M(F(v_i)) \arrow[d, "(N_{F'(v_i)/F(v)})"] \\ K_n^M(F) \arrow[r, "\partial_v"'] & K_{n-1}^M(F(v)) \end{tikzcd}$$

Um die Notation zu vereinfachen, beweisen wir nur folgenden Spezialfall der Proposition.

1.5.6 Korollar

Sei $F \subset F'$ eine endliche Körpererweiterung und v eine diskrete vollständige Bewertung von F, v' sei die Erweiterung von v auf F'. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} K_n^M(F') \arrow[r, "\partial_{v'}"] \arrow[d, "N_{F'/F}"'] & K_{n-1}^M(F'(v')) \arrow[d, "N_{F'(v')/F(v)}"] \\ K_n^M(F) \arrow[r, "\partial_v"'] & K_{n-1}^M(F(v)) \end{tikzcd}$$

Beweisidee des Korollars. Man reduziert den Beweis zuerst auf den Fall, dass F lediglich endliche Körpererweiterungen vom Grad p^m zulässt für eine Primzahl p. Um dies zu rechtferitgen beachte zunächst, dass eine algebraische Körpererweiterung vom Grad prim zu p auf den K-Gruppen einen Homomorphismus induzieren, der einen Kern von Torsion prim zu p hat (Lemma 1.5.2). Sei jetzt $i : F \to E$ die kleinste algebraische Erweiterung von F, so dass die endlichen Erweiterungen von E alle vom Primpotenzgrad p^m sind. Bezeichne die Erweiterung von v auf E wieder mit v. Um zu zeigen, dass das Diagramm im Korollar kommutativ ist, ist es nach dem eben Gesagtem genug, rechts unten noch mit $K^M_{n-1}(F(v)) \to K^M_{n-1}(E(v))$ zusammenzusetzen und zu zeigen, dass das entstehende Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^M_n(F') \arrow[r, "\partial_{v'}"] \arrow[d, "N_{F'/F}"'] & K^M_{n-1}(F'(v')) \arrow[d, "i_* \circ N_{F'(v')/F(v)}"] \\ K^M_n(F) \arrow[r, "i_* \circ \partial_v"'] & K^M_{n-1}(E(v)) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Dies ist hinreichend, um die Kommutativität des ursprünglichen Diagrammes zu zeigen, wenn man p über alle Primzahlen laufen lässt. Nun reduziert man nach einigem Nachrechnen unter Benutzung von 1.5.3 und 1.5.4 – es sei dem geneigten Leser überlassen – weiter auf die Diagramme

$$\begin{tikzcd} K^M_n(F'_i) \arrow[r, "\partial_{v'}"] \arrow[d, "N_{F'_i/E}"'] & K^M_{n-1}(F'_i(v')) \arrow[d, "N_{F'_i(v')/E(v)}"] \\ K^M_n(E) \arrow[r, "\partial_v"'] & K^M_{n-1}(E(v)) \end{tikzcd}$$

wobei die F'_i die Restkörper zu den Primidealen von $F' \otimes_F E$ bezeichnen. Insgesamt reicht es also das Korollar für Körper F zu zeigen, die lediglich endliche Erweiterungen vom Grad p^m besitzen. Des Weiteren kann nach Anwendung von Galoistheorie angenommen werden, dass $deg(F'/F) = p$. Mit der Methode des Beweises des Lemmas 1.3.3 reduziert man die Betrachtung auf ein Element in $K^M_n(F')$ der Form $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $x_1 \in F'$ und $x_2, \ldots, x_n \in F$. Man beendet den Beweis mit Hilfe von 1.4.2. $\square$

Nach dieser Beweisskizze ist – zumindest dem Autor – klar, warum die Grundlagen der Milnor K-Theorie bisher nicht in Lehrbuchform vorliegen.

Kapitel 2

Verallgemeinerung auf lokale Ringe

In diesem Kapitel wollen wir die Konstruktionen des letzten Kapitels auf den Fall von lokalen Ringen verallgemeinern. Im Vordergrund steht dabei Milnors exakte Sequenz 1.3.1. In speziellen Fällen kann damit ein Transfer konstruiert werden.
Obwohl die Konstruktionen dieses Kapitels für semi-lokale Krull-Bereiche funktionieren, geben wir Beweise der Einfachheit halber nur für faktorielle, lokale Ringe. Der allgemeinere Fall ist nicht wesentlich komplizierter.

2.1 Die Gruppe $K_n^t(A)$

Im Folgenden sei A ein lokaler, faktorieller Integritätsring mit unendlichem Restkörper.
Im Fall eines Körpers F stand in der Mitte der Milnor Sequenz 1.3.1 $K_n^M(F(t))$. Diese K-Gruppe wollen wir nun ausgehend von unserem Ring A geeignet verallgemeinern.

2.1.1 Definition

Ein Tupel von rationalen Funktionen $(p_1/q_1, \dots p_n/q_n) \in Q(A)(t)^n$, $p_i, q_i \in A[t]$, heißt zulässig, falls für Primfaktoren v von p_i oder q_i und u von p_j oder q_j, $i \neq j$, gilt $v \in (A[t]/(u))^*$ oder $v = a\,u$ mit $a \in A^*$ und in p_i, q_i vor der höchsten t-Potenz eine Einheit von A steht.

Zunächst beachte, dass der Polynomring $A[t]$ nach dem Gauß-Lemma faktoriell ist. Dies ermöglicht uns folgende

2.1.2 Definition

$\mathcal{T}_n^t(A) := \mathbb{Z} < \{(p_1, \dots, p_n) |\, (p_1, \dots, p_n) \text{ zulässig, } p_i \in A[t] \text{ irreduzibel}\} > /Linear$

wobei Linear die von $(p_1, \ldots, a\, p_i, \ldots, p_n) - (p_1, \ldots, a, \ldots, p_n) - (p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ *erzeugte Untergruppe ist, mit* $a \in A^*$ *und* $(p_j)_j$ *irreduziblen, zulässigen Polynomen.*
Durch bilineare Faktorisierung ist das Element

$$(p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{T}_n^t(A)$$

definiert für beliebiges zulässiges $(p_j)_j$*. Definiere die Untergruppe Steinberg erzeugt von zulässigen Tupeln der Form*

$$(p_1, \ldots, p, 1-p, \ldots, p_n)\,,$$

und

$$(p_1, \ldots, p, -p, \ldots, p_n)\,.$$

$p, p_i \in A(t)$.
Nun sei

$$K_n^t(A) := \mathcal{T}_n^t(A)/\mathit{Steinberg}\,.$$

Wir werden weiterhin das Bild von $(p_1, \ldots, p_n)$ in $K_n^t(A)$ mit $\{p_1, \ldots, p_n\}$ bezeichnen.

2.1.3 Theorem

Für einen faktoriellen, lokalen Ring A mit unendlichem Restkörper[1] *existiert eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow K_n^M(A) \longrightarrow K_n^t(A) \longrightarrow \oplus_\pi K_{n-1}^M(A[t]/(\pi)) \longrightarrow 0\,,$$

wobei π *alle normierten, irreduziblen Polynome durchläuft.*

Der Beweis des Theorems wird sich über den nächsten Abschnitt erstrecken. Zunächst zeigt man die Injektivität auf der linken Seite. Der Beweis der Exaktheit an den anderen beiden Stellen erfolgt durch eine Filtrierung wie im klassischen Fall. Alle im Folgenden auftretenden Tupel von Polynomen sollen zulässig sein. Mit π ist immer ein normiertes, irreduzibles Polynom in $A[t]$ gemeint.

2.1.4 Lemma

Für ein zulässiges n-Tupel $(p_1, \ldots, p_n)$ *und* $1 \le i < n$ *gilt*

$$\{p_1, \ldots, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n\} = -\{p_1, \ldots, p_{i+1}, p_i, \ldots, p_n\} \in K_n^t(A)\,.$$

Beweis. Siehe Lemma 1.1.2. □

[1] Es würde genügen, wenn A ein semi-lokaler Krull-Bereich mit unendlichen Restkörpern ist.

2.2 Beweis von 2.1.3

Schritt 1: Die natürliche Abbildung $i_n : K_n^M(A) \to K_n^t(A)$ ist injektiv.
Wir konstruieren ein Linksinverses ψ_n zu i_n, indem wir einem Polynom seinen höchsten Koeffizienten zuordnen.
Dies ergibt eine wohldefinierte Abbildung $\psi_n : \mathcal{T}_n^t(A) \to K_n^M(A)$.
Zu zeigen ist, dass ψ_n über die Steinbergrelationen faktorisiert.

$$\psi_n((p_1, \ldots, p, -p, \ldots, p_n)) = (\psi_1(p_1), \ldots, \psi_1(p), -\psi_1(p), \ldots, \psi_1(p_n)) = 0$$

Mit $p, q \in A[t]$, $deg(p) > deg(q)$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi_n((p_1, \ldots, p/q, 1-p/q, \ldots, p_n)) &= \psi_n((p_1, \ldots, p/q, (q-p)/q, \ldots, p_n)) \\
&= (\psi_1(p_1), \ldots, \psi_1(p)/\psi_1(q), -\psi_1(p)/\psi_1(q), \ldots, p_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

für $deg(p) < deg(q)$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi_n((p_1, \ldots, p/q, 1-p/q, \ldots, p_n)) &= \psi_n((p_1, \ldots, p/q, (q-p)/q, \ldots, p_n)) \\
&= (\psi_1(p_1), \ldots, \psi_1(p)/\psi_1(q), 1, \ldots, p_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

für $deg(p) = deg(q) = deg(q-p)$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi_n((p_1, \ldots, p/q, 1-p/q, \ldots, p_n)) &= \psi_n((p_1, \ldots, p/q, (q-p)/q, \ldots, p_n)) \\
&= (\psi_1(p_1), \ldots, \psi_1(p)/\psi_1(q), 1-\psi_1(p)/\psi_1(q), \ldots, p_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

für $deg(q) = deg(p) > deg(p-q)$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi_n((p_1, \ldots, p/q, 1-p/q, \ldots, p_n)) &= \psi_n((p_1, \ldots, p/q, (q-p)/q, \ldots, p_n)) \\
&= (\psi_1(p_1), \ldots, 1, \psi_1(q-p)/\psi_1(q), \ldots, p_n) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\psi_n : K_n^t(A) \to K_n^M(A)$ existiert und offensichtlich ist $\psi_n \circ i_n = id$.

Schritt 2: Konstruktion der Abbildung $K_n^t(A) \to \oplus_\pi K_{n-1}^M(A[t]/(\pi))$.
π sei im Folgenden irreduzibel und normiert. Wir geben Homomorphismen $\partial_\pi : K_n^t(A) \to K_{n-1}^M(A[t]/(\pi))$ an. Diese werden eindeutig durch die Forderung

$$\partial_\pi(\{\pi, p_2, \ldots, p_n\}) = \{\bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n\}$$

bestimmt.
Offensichtlich muß man noch die Wohldefiniertheit, besonders die Verträglichkeit mit den Steinbergrelationen, überprüfen. Dies kann man zum Beispiel mit einem Trick ähnlich dem für Körper in Lemma 1.2.1 zeigen.

Der zu konstruierende Homomorphismus

$$K_n^t(A) \to \oplus_\pi K_{n-1}^M(A[t]/(\pi))$$

ist nun einfach die Summer der ∂_π.
Schritt 3: Die Filtrierung $L_d \subset K_n^t(A)$.
L_d sei die Untergruppe von $K_n^t(A)$ erzeugt von zulässigen Tupeln der Form $(p_1, \ldots, p_n)$ mit Polynomen p_i vom Grad kleiner oder gleich d.
Nach Schritt 1 gilt $L_0 \cong K_n^M(A)$. Man beachte, dass der Morphismus aus Theorem 1

$$K_n^t(A) \longrightarrow \oplus_\pi K_{n-1}^M(A/(\pi))$$

L_d in $\oplus_{deg(\pi)\leq d} K_{n-1}^M(A/(\pi))$ abbildet. Wir werden in den restlichen Beweisschritten zeigen, dass

$$L_d/L_{d-1} \longrightarrow \oplus_{deg(\pi)=d} K_{n-1}^M(A/(\pi))$$

ein Isomorphismus ist, indem man ein Rechts-Inverses $(h_\pi)_\pi$ angibt (Schritt 4) und zeigt, dass dieses surjektiv ist (Schritt 5). Daraus folgt das Theorem durch eine Standardargumentation.

Schritt 4 Der Homomorphismus $h_\pi : K_{n-1}^M(A/(\pi)) \longrightarrow L_d/L_{d-1}$.
Im Folgenden sei für $\bar{g} \in A[t]/(\pi)$ mit $g \in A[t]$ der eindeutige Repräsentant mit $deg(g) < deg(\pi)$ bezeichnet. Es sei π ein normiertes, irreduzibles Polynom vom Grad d.
Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus

$$h_\pi : K_{n-1}^M A[t]/(\pi) \longrightarrow L_d/L_{d-1} ,$$

der $\{\bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n\}$ in $\{\pi, g_2, \ldots, g_n\}$ überführt, falls $(\pi, g_2, \ldots, g_n)$ zulässig ist.
Die Eindeutigkeit ergibt sich aus dem Faktorisierungslemma 6.1.1. Man beachte, dass dabei die Unendlichkeit des Restkörpers von A benutzt wird.
Für beliebiges $\{\bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n\} \in K_{n-1}^M(A/(\pi))$ erlaubt dieses Lemma eine Faktorisierung

$$g_i \equiv g_i' g_i'' \bmod (\pi)$$

für $2 \leq i \leq n$ und $deg(g_i^*) < d$, so dass $(\pi, g_2^*, \ldots, g_n^*)$ zulässig ist (der Stern steht jeweils für ein- oder zweigestrichen). Nun können wir $\{\bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n\}$ als Summe von Termen der Form $\{\bar{g}_2^*, \ldots, \bar{g}_n^*\}$ schreiben. Für diese ist aber

$$h_\pi(\{\bar{g}_2^*, \ldots, \bar{g}_n^*\}) = \{\pi, g_2^*, \ldots, g_n^*\} .$$

Damit ist die Eindeutigkeit klar.
Der vollständige Existenzbeweis ist leider zu umfangreich, als dass wir ihn hier wiedergeben könnten.
Die Idee ist, eine Faktorisierung wie oben zu wählen und $h_\pi(\{\bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n\})$ als die Summe der $\{\pi, g_2^*, \ldots, g_n^*\}$ zu definieren, wobei $*$ in jedem Index über

ein- und zweigestrichen läuft.

Schritt 5 $\oplus_{deg(\pi)=d} K^M_{n-1}(A/(\pi)) \longrightarrow L_d/L_{d-1}$ ist surjektiv.

Wir begnügen uns hier zu zeigen, dass $\{\pi, f, g_3, \ldots, g_n\}$ im Bild dieses Homomorphismus ist, wobei π, f vom Grad $d > 1$ seien und die g_i vom Grad kleiner d seien. Außerdem seien $\bar{g}_i \in (A/(\pi))^*$ und $\bar{f} \in (A/(\pi))^*$.
Mit Hilfe des Faktorisierungslemmas 6.1.1 kann man beweisen, dass man

$$f = f'\,\pi + f_1\, f_2$$

schreiben kann mit $(f'\pi, f, f_1, f_2, g_3, \ldots, g_n)$ zulässig und f_1, f_2, f' vom Grad kleiner d. Dann gilt wegen der Steinbergrelationen

$$(\{f'\} + \{\pi\} - \{f\})(\{f_1\} + \{f_2\} - \{f\})\{g_3, \ldots, g_n\} = 0$$

in L_d/L_{d-1}. Oder modulo des Bildes des obigen Homomorphismus

$$\{\pi, f, g_3, \ldots, g_n\} \equiv 0\,.$$

□

2.3 Der Transfer

Theorem 2.1.3 wirft die Frage auf, inwiefern es für lokale Ringe möglich ist, einen Transfer in der Milnor K-Theorie zu definieren.
Zunächst sieht man leicht, in welchem Verhältnis die Sequenz 2.1.3 zur entsprechenden Sequenz für den Quotientenkörper von A steht.

2.3.1 Proposition

Sei A ein lokaler, faktorieller Ring mit unendlichem Restkörper. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K^M_n(A) & \longrightarrow & K^t_n(A) & \longrightarrow & \oplus_\pi K^M_{n-1}(A[t]/(\pi)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K^M_n(Q(A)) & \longrightarrow & K^M_n(Q(A)[t]) & \longrightarrow & \oplus_\pi K^M_{n-1}(Q(A)[t]/(\pi)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

In der oberen Summe läuft π über die irreduziblen, normierten Polynome in $A[t]$. In der unteren Summe läuft π über die irreduziblen, normierten Polynome von $Q(A)[t]$. Die Abbildung rechts ist induziert durch den kanonischen Homomorphismen $A[t]/(\pi) \to Q(A)[t]/(\pi)$.

Beweis. Die Kommutativität des linken Quadrats ist klar. Wie zeigen die Kommutativität im rechten Quadrat.

Zuerst projeziert man in der Summe rechts unten im Diagramm auf einen Summanden $K^M_{n-1}(Q(A)[t]/(\pi))$. Nun muss man nur noch beachten, dass wie man auch geht ein Element der Form

$$\{\pi, g_2, \dots, g_n\} \in K^t_n(A)$$

– g_i coprim zu π – auf $\{\bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n\} \in K^M_{n-1}(Q(A)[t]/(\pi))$ abgebildet wird.

□

Für einen lokalen, faktoriellen Ring A mit unendlichem Restkörper und ein normiertes, irreduzibles Polynom $p \in A[t]$ definiert man nun nach dem Vorbild von Abschnitt 1.4 eine Norm

$$N_{B/A} : K^M_n(B) \longrightarrow K^M_n(A) ,$$

wobei $B = A[t]/(p)$ sei.

2.3.2 Definition

Mit obiger Notation wähle zu einem $x \in K^M_n(B)$ ein $x' \in K^t_{n+1}(A)$ mit $\partial_p(x') = x$ und $\partial_{p'}(x') = 0$ für alle irreduziblen, normierten $p \neq p' \in A[t]$. Wir definieren

$$N_{B/A}(x) = -\partial_\infty(x') ,$$

wobei das zahme Symbol im Unendlichen ∂_∞ wie in Abschnitt 2.2 Schritt 2 zu $\pi = 1/t$ konstruiert wird.

Aus Proposition 2.3.1 ergibt sich die

2.3.3 Proposition

Folgendes Quadrat ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} K^M_n(B) & \longrightarrow & K^M_n(Q(B)) \\ {\scriptstyle N_{B/A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N_{Q(B)/Q(A)}} \\ K^M_n(A) & \longrightarrow & K^M_n(Q(A)) \end{array}$$

□

Wie wir später sehen werden wird vermutet, dass die horizontalen Pfeile in der letzten Proposition für reguläre Ringe A, B injektiv sind. Da man nach Abschnitt 1.4 die Unabhängigkeit von der Wahl des Erzeugenden für die Norm $N_{Q(B)/Q(A)}$ hat, könnte man dies auch für die in diesem Abschnitt konstruierte Norm beweisen.

2.3.4 Vermutung

Sei A ein lokaler, faktorieller Ring mit unendlichem Restkörper und $p \in A[t]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom, $B = A[t]/(p)$. Dann hängt die Norm

$$K_n^M(B) \xrightarrow{N_{B/A}} K_n^M(A)$$

nur von der Isomorphieklasse von B über A ab.

Da jede endliche, unverzweigte Erweiterung von semi-lokalen, regulären Ringen mit unendlichen Restkörpern $A \subset B$ nach Lemma 6.2.1 von einem Element $t \in B$ über A erzeugt wird, könnte man also eine Norm

$$N_{B/A}^{(t)} : K_n^M(B) \longrightarrow K_n^M(A)$$

definieren, die womöglich von t abhängt. Eine andere Variante der Vermutung 2.3.4 ist dann, dass man eine wohldefinierte, funktorielle Norm für endliche, unverzweigte Erweiterungen von semi-lokalen, regulären Ringen erhält.

Kapitel 3

Der Gerstenkomplex

Nachdem wir in Kapitel 1 die nötigen Grundbegriffe der Milnor K-Theorie dargestellt haben, können wir nun zum eigentlichen Thema dieser Arbeit kommen. Der Gerstenkomplex ist grob gesprochen eine Verallgemeinerung der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow Q(A) \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,,$$

wobei A ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung v ist, Q(A) wie gewöhnlich der Quotientenring.
Sei jetzt X ein reguläres, irreduzibles, eindimensionales Schema mit generischem Punkt η. Dann ergibt sich aus dieser Sequenz eine exakte, azyklische Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow i_{\eta\,*}(\boldsymbol{k}(\eta)^*) \longrightarrow \oplus_{x\in X^{(1)}} i_{x\,*}(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0\,.$$

Dabei steht $X^{(1)}$ für die Menge der Punkte der Codimension 1 in X, die i_y für den Morphismus $\{y\} \to X$, $y \in X$.
Da $\oplus_{x\in X^{(1)}} i_{x\,*}(\mathbb{Z})$ genau die Gruppe der Weil-Divisoren auf X ist und der Kokern von $\boldsymbol{k}(\eta)^* \to \oplus_{x\in X^{(1)}} i_{x\,*}(\mathbb{Z})$ die Gruppe der Weil-Divisoren modulo linearer Äquivalenz von X ist [EGA IV], folgert man, dass

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div.pric}(X)\,. \tag{3.1}$$

Diese Beziehung ist natürlich klassisch. Wichtig für uns ist der Zusammenhang mit der eben besprochenen exakten Sequenz, die sich, wie vermutet wird, zu einer Auflösung der K-Garbe auf einer glatten Varietät verallgemeinern lässt. Dazu konstruiert man den Gerstenkomplex für einen regulären, lokalen Ring A

$$K_n^M(Q(A)) \to \sum_{x\in Spec(A)^{(1)}} K_{n-1}^M(x) \to \sum_{x\in Spec(A)^{(2)}} K_{n-2}^M(x) \to \cdots$$

und versucht zu beweisen, dass dieser exakt ist.
Wenn der Kern links für alle A gleich $K_n^M(A)$, ist erhält man eine Verallgemeinerung von (3.1)

$$H^n(X, \mathcal{K}_n^M) = CH^n(X)$$

für ein reguläres Schema X. Eine solche Beziehung nennt man auch Bloch-Formel, da dieser sie im Falle der Quillen K-Theorie und für X glatt über einem Körper als erster bewies.

Dieses Kapitel ist wie folgt aufgebaut: Zuerst gebe ich zwei sehr verschiedene Konstruktionen des Gerstenkomplexes für die Milnor K-Theorie. Die erste basiert auf einer ad hoc Beschreibung der Differentiale; umständlich erweist sich der Nachweis, dass es sich um einen Komplex handelt. Die zweite entspringt der Erkenntnis, dass die Milnor K-Gruppen von Körpern sich unter den höheren Chowgruppen nach Bloch wiederfinden. Wenn wir die nötige Theorie voraussetzen, ergibt sich der Gerstenkomplex aus einer simplen Coniveaufiltrierung.
In den folgenden Abschnitten wird die Verträglichkeit mit Pushforward und Pullback besprochen. Dazu werden wir den Begriff der Chowgruppen mit Koeffizienten in der Milnor K-Theorie einführen. Schließlich wird nach quillenschem Muster die Exaktheit des Gerstenkomplexes gezeigt. Das eigentliche Thema dieser Arbeit, nämlich die Frage, ob der Gerstenkomplex überhaupt die oben angekündigte Garbe $\mathcal{K}_n^M$ auflöst, bleibt den folgenden Kapiteln vorbehalten.

3.1 Konstruktion I

In diesem Abschnitt geben wir eine elementare Konstruktion des Gerstenkomplexes nach [Kato86].
Sei im Folgenden X ein exzellentes, noethersches Schema. Definiere

$$K_n^M(x) := K_n^M(\boldsymbol{k}(x))$$

für einen Punkt $x \in X$.
Der Gerstenkomplex für irreduzibles X, $n > \dim(X) = d$, ist dann von der Form

$$\begin{aligned} \oplus_{x \in X^{(0)}} K_n^M(x) \longrightarrow \oplus_{x \in X^{(1)}} K_{n-1}^M(x) \longrightarrow \oplus_{x \in X^{(2)}} K_{n-2}^M(x) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow \oplus_{x \in X^{(d)}} K_{n-d}^M(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Für $n < \dim(X)$ endet der Komplex entsprechend bei $\oplus_{x \in X^{(d-n)}} K_0^M(x)$.
Mit $i > 0$ sei der Summand

$$K_{i+1}^M(y) \to K_i^M(x)$$

des Differentials mit ∂_x^y bezeichnet, $x, y \in X$. Er ist nur dann von Null verschieden, wenn

$$x \in \overline{\{y\}}^{(1)}$$

ist.
Dieses Differential ∂_x^y, mit $x, y \in X$, definieren wir wie folgt:
Ohne Einschränkungen können wir annehmen, dass X ein affines, irreduzibles und reduziertes Schema mit generischem Punkt y und abgeschlossenem Punkt x ist, $X = Spec(A)$. Für den Fall, dass A ein diskreter Bewertungsring mit Bewertung v ist, wähle ∂_x^y einfach als das zahme Symbol ∂_v aus Abschnitt 1.2.
Ansonsten sei $\tilde{Y}$ die Normalisierung von Y. Setze

$$\partial_x^y = \sum_{x' \in \tilde{Y}^{(1)}} N_{\boldsymbol{k}(x')/\boldsymbol{k}(x)} \circ \partial_{x'}$$

Dabei ist $\partial_{x'}$ das zahme Symbol von $\mathcal{O}_{\tilde{Y},x'}$. Auf Grund der Exzellenz sind die Körpererweiterungen $\boldsymbol{k}(x')/\boldsymbol{k}(x)$ endlich, so dass die Wohldefiniertheit des Symbols ∂_x^y garantiert ist.
Weniger offensichtlich ist, dass nach obiger Wahl (3.2) zu einem Komplex wird. Mit dem Beweis dieser Behauptung werden wir uns im Rest dieses Abschnittes befassen.
Dabei wird immer wieder folgendes Lemma einfließen

3.1.1 Lemma

Sei A ein eindimensionaler, lokaler, exzellenter Integritätsring und $Q(A) \subset F$ eine endliche Körpererweiterung. Sei weiter $\tilde{A}$ die Normalisierung von A in F, $\tilde{X} = Spex(\tilde{A})$. Bezeichne mit y den generischen Punkt von $X = Spec(A)$ und mit x den abgeschlossenen. $\tilde{y}$ sei der generische Punkt von $\tilde{X}$. Es gilt nun für $n > 0$

$$\partial_x^y \circ N_{F/Q(A)} = \sum_{\tilde{x} \in \tilde{Y}^{(1)}} N_{\boldsymbol{k}(\tilde{x})/\boldsymbol{k}(x)} \circ \partial_{\tilde{x}}^{\tilde{y}} : K_n^M(F) \to K_{n-1}^M(\boldsymbol{k}(x)) \; .$$

Beweis. Diese Aussage folgt unmittelbar aus Proposition 1.5.5. □

3.1.2 Theorem

Mit obiger Definition der Differentiale ist (3.2) ein Komplex.

Beweis. Ohne Einschränkungen sei $X = Spec(A)$ mit einem zweidimensionalen, lokalen Integritätsbereich A. Nach Lemma 3.1.1 können wir annehmen, dass A normal ist.

Die Vervollständigung von A ist nun ein Integritätsbereich. Da folmale Fasern eines exzellenten Ringes reduziert sind, können wir eine Verallgemeinerung von Lemma 1.5.3 anwenden, wobei die Verzweigungsgrade 1 sind, so dass A auch als vollständig angenommen werden kann.
Tatsächlich ist der letzte Schritt etwas komplizierter; da die Methoden jedoch kanonisch sind, wird er hier nicht wiedergegeben.[1]
Nach Theorem 6.2.2 können wir annehmen, dass A endlich über dem formalen Potenzreihenring $B[[T]]$ ist, mit einem vollständigen diskreten Bewertungsring B, der den gleichen Restkörper wie A hat.
Durch eine Anwendung von Lemma 3.1.1 reduziert man den Beweis auf $A = B[[T]]$.
Wir kommen nun zum eigentlichen Kern des Beweises. Sei $K = Q(A)$ und F der Restkörper von A. Zu zeigen ist, dass der Homomorphismus

$$K^M_{n+2}(K) \xrightarrow{(\partial_x)} \oplus_{x\in X^{(1)}} K^M_{n+1}(x) \xrightarrow{(\partial'_x)} K^M_n(F) \tag{3.3}$$

mit $X = Spec(A)$ die Nullabbildung ist.
Um dies zu beweisen, müssen wir verschiedene Klassen von Elementen aus $K^M_*(K)$ unterscheiden. Zuerst sieht man unmittelbar

$$\partial'_x \circ \partial_x(\{a, b\} = \{\bar{a}, \partial'_x \circ \partial_x(b)\} \in K^M_n(F) \tag{3.4}$$

für $a \in A^*$, $b \in K^M_{n+1}(K)$ und $x \in X^{(1)}$. Anders ausgedrückt machen uns die A^* keine Probleme, da wir sie aus bei der Berechnung von (1.2) herausziehen können.
Weitere für den Beweis zu unterscheidende Klassen von Elementen aus K^* sind π, T und H, wobei π ein Primelement von B sei und H die Menge der Elemente der Form

$$1 + a_1\, T^{-1} + \cdots + a_r\, T^{-r}$$

mit den a_i, $i = 1\ldots, r$, im maximalen Ideal von B.

3.1.3 Lemma

K^* wird von A^*, π, T, H als Gruppe erzeugt.

Beweis. Sei $p = a_0 + a_1\, T + a_2\, T^2 + \cdots \in A$ mit $a_0, a_1, \ldots \in B$. Falls der kleinste nicht verschwindende Koeffizient von p in B^* ist, hat man $p \in (T)\, A^* \subset K^*$. Andernfalls sei a_i der niedrigste Koeffizient von p, der in B^* liegt; wenn ein solcher nicht existiert, multipliziere mit Potenz von $1/\pi$. Jetzt kann man schreiben $p = p_1\, p_2$ mit $p_1 \in H$, $\deg_{1/T}(p_1) = i$, und p_2 gleich p bis auf die Terme der Ordnung kleiner i. □

[1] In [Kato86] heißt es dazu nur "By an easy reduction ... we can replace A by its completion".

Unter Beachtung von (3.4) bleiben nur noch die beiden folgenden Gleichungen zu beweisen.

$$\sum_{x \in X^{(1)}} \partial'_x \circ \partial_x(\{\pi, T\}) = 0 \tag{3.5}$$

$$\sum_{x \in X^{(1)}} \partial'_x \circ \partial_x(\{f, g_1, \ldots, g_{n+1}\}) = 0 \tag{3.6}$$

Hier ist $f \in H$ und die $g_1, \ldots, g_{n+1}$ sind Elemente der von H, π, T erzeugten Untergruppe von K^*.
Gleichung (3.5) ist recht offensichtlich; die einzigen möglicherweise nicht verschwindenden Summanden gehören zu den Idealen $x_1 = (T), x_2 = (\pi) \subset A$ und

$$\begin{aligned} \partial'_{x_1} \circ \partial_{x_1}(\{\pi, T\}) &= -1 \\ \partial'_{x_2} \circ \partial_{x_2}(\pi, T\}) &= 1 \end{aligned}$$

Gleichuung (3.6) ist etwas komplizierter. Hier benutzt man das Reziprozitätsgesetz für die Norm (siehe Abschnitt 1.4): Seien $k = Q(B)$ und P die Primstellen von $k(T)/k$, dann gilt

$$\sum_{v \in P} N_{k(v)/k} \circ \partial_v = 0 : K^M_{*+1}(k(T)) \longrightarrow K^M_*(k)\ . \tag{3.7}$$

Sei $x_0 \in X^{(1)}$ das Primideal $(\pi) \in A$. Im Folgenden identifizieren wir Elemente von $X^{(1)} - \{x_0\}$ mit ihren Bildern unter der Abbildung

$$Spec(A[\frac{1}{\pi}]) \longrightarrow Spec(k[T])\ .$$

Sei

$$\alpha = \{f, g_1, \ldots, g_{n+1}\} \in K^M_{n+2}(k(T))$$

mit den $f, g_1, \ldots, g_{n+1}$ wie in (3.6). Die zahmen Symbole dieses Elements kann man sowohl über $k(T)$ berechnen als auch über K.

3.1.4 Lemma

Für eine Bewertung $v \in [P - (X^{(1)} - \{x_0\})] \cup x_0$ *gilt*

$$\partial_v(\alpha) = 0\ .$$

Beweis. Für $v = x_0$ hat man

$$\partial_v(\alpha) = \{\bar{f}, \ldots\} = 0\ ,$$

da $\bar{f} = 1$.
Falls v zum Punkt im unendlichen von $k(T)$ gehört, hat man ebenfalls $\bar{f} = 1$.
Für die anderen Bewertungen $v \in P - (X^{(1)} - \{x_0\})$ hat man $v(\pi) = 0$, $v(T) = 0$ und $v(H) = 0$. □
Mit dem Lemma vereinfacht sich (3.7) zu

$$\sum_{x \in X^{(1)} - \{x_0\}} N_{k(v)/k} \circ \partial_x(\alpha) = 0$$

Sei schließlich $\partial_F^k : K_{n+1}^M(k) \to K_n^M(F)$ das zahme Symbol zur π-Bewertung von k. Wir haben nach Lemma 3.1.1 und Lemma 3.1.4

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X^{(1)}} \partial'_x \circ \partial_x(\alpha) &= \partial'_{x_0} \circ \partial_{x_0}(\alpha) + \partial_F^k \sum_{x \in X^{(1)} - \{x_0\}} N_{k(x)/k} \circ \partial_x(\alpha) \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

□

3.2 Konstruktion II

Dieser Abschnitt ist für den in diesem Kapitel folgenden Aufbau der Theorie nicht entscheidend. Er ist nur angefügt, um die Konstruktion des Gerstenkomplexes von einer geometrischen Sicht gesehen zu motivieren und um höhere Chowgruppen für die Konstruktion im nächsten Kapitel einzuführen. Grundlegend ist dabei die Coniveaufiltrierung, die für eine Bloch-Ogus Theorie einen (exakten) Gerstenkomplex liefert [Quil73], [BlochOgus75]. Eine Spezialisierung dieser Methoden auf den Fall der höheren Chowgruppen nach Boch [Bloch86] liefert uns den im letzten Abschnitt angegebenen Gerstenkomplex für Milnor K-Gruppen (bis auf Vorzeichen), da man für einen Körper F

$$CH^n(Spec(F), n) = K_n^M(F)$$

hat. [NesSus89], [Tot92].

Wir folgen in unserer Definition der höheren Chowgruppen [Tot92]. Es sei X immer ein quasi-projektives Schema über einem Körper k.

3.2.1 Definition

Bezeichne mit $z^*(X)$ die Gruppe der algebraischen Zykel auf einer Varietät X/k.
Sei $c^*(X, n) \subset z^*(X \times_k (\mathbb{P} - \{1\})^n)$ die Untergruppe der Zykel, die die 0- oder ∞-Seiten des Kubus eigentlich schneiden. Wenn $\partial_i^\epsilon : c^*(X, n) \to c^*(X, n-1)$ der Zykel-Pullback bezüglich der Seitenabbildung

$$(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (t_1, \ldots, t_{i-1}, \epsilon, t_i, \ldots, t_{n-1})$$

ist, definiere $d_n : c^*(X,n) \to c^*(X,n-1)$ *durch*

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\partial_i^0 - \partial_i^1) \ .$$

Sei weiter $d^*(X,*) \subset c^*(X,*)$ *der Unterkomplex der degenerierten Zykel (siehe[Tot92]).*
Dann sind die höheren Chowgruppen $CH^m(X,n)$ *die Homologiegruppen* $H_n(c^m(X,*)/d^m(X,*))$.

Für unsere Interpretation zentral ist das Theorem von Nesterenko, Suslin, Totaro

3.2.2 Theorem

Sei F ein Körper. Es gilt

$$CH^n(Spec(F),n) = K_n^M(F) \ .$$

Beweis. Wir geben lediglich den Isomorphismus $CH^n(Spec(F),n) \to K_n^M(F)$ an, da wir diesen später noch brauchen werden. Sei

$$p = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{P}_F^1 - \{1\})^n - Kubus$$

Wir ordnen dem Element $\{x_1, \dots, x_n\} \in CH^n(Spec(F),n)$ das Element

$$N_{\mathbf{k}(p)/F}\{x_1, \dots x_n\} \in K_n^M(F)$$

zu. □

Wir konstruieren nun den Gerstenkomplex für die höheren Chowgruppen.
Für ein irreduzibles Schema X sei

$F^n z^r(X,*) = \{z \in z^r(X,*) | \text{Die Projektion von Supp}(z) \text{ auf } X \text{ hat Codimension} \geq n\}$

Man kann zeigen, dass man einen Quasi-Isomorphismus

$$F^n z^r(X,*)/F^{n+1}z^r(X,*) \longrightarrow \oplus_{x\in X^{(n)}} z^{r-n}(Spec(\mathbf{k}(x),*)$$

hat, so dass die zur Filtrierung assoziierte Spektralsquenz als $E_1^{*,*}$ Terme Gerstenkomplexe

$$\oplus_{x\in X^{(0)}} CH^r(Spec(\mathbf{k}(x),q) \longrightarrow \oplus_{x\in X^{(1)}} CH^{r-1}(Spec(\mathbf{k}(x),q-1) \longrightarrow \cdots \tag{3.8}$$

liefert.

Dass der Gerstenkomplex für die höheren Chowgruppen (3.8) (für $r = q$) mittels Theorem 3.2.2 mit dem Gerstenkomplex der Milnor K-Theorie identifiziert werden kann (bis auf ein Vorzeichen), folgt z.B. aus [GeiLev00].

Für später benötigen wir noch einen Spezialfall der Gerstenvermutung für die höheren Chowgruppen. Der Beweis ist fast identisch mit dem im hinteren Teil dieses Kapitels entwickelten für Milnors K-Gruppen.

3.2.3 Proposition

Sei A ein glatter, lokaler Ring von geometrischem Typ über einem Körper, $X = Spec(A)$. Dann ist

$$0 \longrightarrow CH^n(X,n) \longrightarrow CH^n(Spec(Q(A)),n) \longrightarrow \oplus_{x\in X^{(1)}} CH^{n-1}(Spec(\mathbf{k}(x),n-1)$$

exakt.

Beweis. Siehe [Bloch86, Theorem (10.1)] □

3.3 Chowgruppen mit Koeffizienten

Von Markus Rost [Rost96] stammt die Beobachtung, dass die Homologiegruppen in dem oben eingeführten Gerstenkomplex auch als klassische Chowgruppen mit Koeffizienten in der Milnor K-Theorie aufgefasst werden können. Wir führen folgende Notation ein:

$$C_p(X,n) := \oplus_{x\in X_{(p)}} K_n^M(x) \ .$$

Dabei ist wie oben X ein exzellentes Schema, $p, n \in \mathbb{Z}$. Die in den beiden letzten Abschnitten eingeführten Differentiale

$$d : C_p(X,n) \longrightarrow C_{p-1}(X,n-1)$$

bilden nach Theorem 1.1.2 einen Komplex. Die zugehörige Homologie sei mit $H_p(X,n)$ bezeichnet.
Dann ist unmittelbar ersichtlich, dass

$$H_p(X,0) = CH_p(X) \ ,$$

wobei $CH_*(X)$ die Chowgruppen von X bezeichnen. Es ist ein klassisches Resultat, dass die Chowgruppen kovariant bezüglich eigentlicher Pushforwards und kontravariant bezüglich flacher Pullbacks sind (siehe z.B. [Ful98]). Rost hat diese Funktorialität in naheliegender Weise auf $H_*(X,*)$ verallgemeinert. Diese und weitere Operationen werden im nächsten Abschnitt auf Ebene der $C_*(X,*)$ eingeführt. Die Kompatibilität mit den Differentialen wird im übernächsten Abschnitt bewiesen.

Wie üblich seien für einen Homomorphismus

$$\alpha : C_p(X,n) \longrightarrow C_{p'}(Y,n')$$

die Summanden mit

$$\alpha^x_y : K^M_n(x) \longrightarrow K^M_{n'}(y)$$

bezeichnet. Alle auftauchenden Schemata seien von endlichem Typ über einem Körper und ebenso alle Schema-Morphismen relativ zum Grundkörper.

3.4 Die vier Standardabbildungen

Die vier Standardabbildungen für den Komplex $C_*(X,*)$ sind:

1. **Pushforward** Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Setze
$$f_* : C_p(X,n) \longrightarrow C_p(Y,n)$$
dadurch fest, dass für $y = f(x)$ und $\boldsymbol{k}(x)$ endlich über $\boldsymbol{k}(y)$
$$(f_*)^x_y = N_{\boldsymbol{k}(x)/\boldsymbol{k}(y)} \, .$$
Andernfalls sei $(f_*)^x_y = 0$.

2. **Pullback** Sei $g : Y \to X$ ein äquidimensionaler Morphismus der relativen Dimension s. Wir wollen einen Homomorphismus
$$g^* : C_p(X,n) \longrightarrow C_{p+s}(Y,n)$$
wie folgt definieren. Falls y von Codimension 0 in der Faser über x ist, setze
$$(g^*)^x_y = \mathrm{length}(\mathcal{O}_{Y_x,y})\; i_*$$
mit der natürlichen Einbettung $i : \boldsymbol{k}(x) \to \boldsymbol{k}(y)$. Ansonsten sei $(g^*)^x_y = 0$.

3. **Multiplikation mit globaler Einheit** Für $a \in \mathcal{O}^*_X(X)$ sei
$$\{a\} : C_p(X,n) \longrightarrow C_p(X,n+1)$$
definiert durch
$$\{a\}^x_y(\alpha) = \{a\} \cdot \alpha$$
für $x = y$ und $\{a\}^x_y(\alpha) = 0$ sonst.

4. **Randabbildung** Sei Y ein abgeschlossenes Unterschema von X, $U = X - Y$. Die Randabbildung
$$\partial^U_Y : C_p(U,n) \longrightarrow C_{p-1}(Y,n-1)$$
ist definiert durch die ∂^x_y aus Abschnitt 1.1.

Wie in der algebraischen Geometrie üblich definieren wir Korrespondenzen für unsere Homologietheorie $C_*(-,*)$ wie folgt.

3.4.1 Definition

Mit der K-Korrespondenz

$$\alpha : X \Longrightarrow Y$$

bezeichnen wir einen Homomorphimus

$$\alpha : C_*(X, n) \longrightarrow C_*(Y, n')$$

der sich als Summe von Kompositionen der vier Standardabbildungen zusammensetzt.

3.5 Kompatibilitäten

In [Rost96] ist eine Familie von Beziehungen aufgezählt, die die vier Standardhomomorphismen erfüllen. Darunter sind einige aus [Ful98] bekannte Gesichter. Wir verzichten auf Beweise.

3.5.1 Proposition

(i) Seien $f : X \to Y$ und $f' : Y \to Z$ Morphismen von Schemata. Dann gilt

$$(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_* \ .$$

(ii) Seien $g : Y \to X$ und $g' : Z \to Y$ äquidimensionale Morphismen und g' sei flach. Dann gilt

$$(g \circ g')^* = g'^* \circ g^* \ .$$

(iii) Sei

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g'} & Z \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

ein Pullbackdiagramm mit g universell äquidimensional. Dann gilt

$$g^* \circ f_* = f'_* \circ g'^* \ .$$

Die nächste Proposition ist auf eine Situation zugeschnitten, der wir im Beweis der Exaktheit des Gerstenkomplexes im nachsten Abschnitt begegnen werden.

3.5.2 Proposition

Sei $g : Y \to X$ ein glatter Morphismus mit konstanter Faserdimension eins und sei $\sigma : X \to Y$ ein Schnitt von g. Weiter sei $t \in \mathcal{O}_Y(Y)$ ein Parameter, der das Unterschema $\sigma(X)$ induziert und $U = Y - \sigma(X)$. Definiere $g' : Y - \sigma(X) \to X$ als die Einschränkung von g. Dann gilt

$$\partial_Y^U \circ g'^* = 0 \quad \textit{und} \quad \partial_Y^U \circ \{t\} \circ g'^* = (id_X)_* \ .$$

Schließlich hat man noch die bereits angekündigte Verträglichkeit des Pushforwards von eigentlichen Morphismen und flachen Pullbacks mit den Differentialen.

3.5.3 Proposition

(i) Sei $f : X \to Y$ eigentlich. Man hat dann

$$d_Y \circ f_* = f_* \circ d_X \ .$$

(ii) Sei $g : Y \to X$ flach, äquidimensional mit konstanter Faserdimension. Dann gilt

$$g^* \circ d_X = d_Y \circ g^* \ .$$

(iii) Für ein $a \in \mathcal{O}_X(X)^*$ hat man

$$d_X \circ \{a\} = -\{a\} \circ d_X \ .$$

3.6 Die Exaktheit

O. Gabber hat Methoden, mit denen Quillen die Existenz einer Gerstenauflösung für seine K-Theorie zeigen konnte, an die Milnor K-Theorie angepasst (siehe [Rost96]).[2] Diesen Exaktheitsbeweis geben wir hier wieder. Für ein irreduzibles Schema X der Dimension d bezeichnen wir $H^p(C_{d-*}(X, n - *))$ auch mit $A^p(X)$; dabei erweist es sich als nützlich n zu unterdrücken.

3.6.1 Theorem

Sei X glatt von geometrischem Typ über dem Körper k und lokal.[3] Dann gilt

$$A^p(X) = 0$$

[2] Ein Spezialfall war schon vor Gabber bekannt (siehe [Kato86])

[3] Es ist auch hinreichend X semi-lokal zu fordern.

für $p > 0$.

Beweis. In diesem Abschnitt wollen wir weiter annehmen, dass k unendlich ist. Ansonsten wende den Standardtrick aus dem nächsten Abschnitt an und reduziere den Beweis auf den Fall eines unendlichen Körpers.

3.6.2 Lemma

Sei X eine glatte Varietät, $Y \subset X$ ein abgschlossenes Unterschema der Codimension größer eins und $x \in Y$ ein Punkt. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset X$ von x in X, so dass

$$A^p(Y \cap U) \xrightarrow{i_*} A^p(U)$$

der Nullhomomorphismus ist, wenn $i : Y \cap U \to U$ die Inklusion ist.

Beweis. O.B.d.A. sei X affin und irreduzibel. Nach einem Normalisierungssatz [CHK97] wissen wir, dass wir ein Schema A finden können und einen glatten Morphismus $X \to A$ der Dimension eins, so dass $Y \to A$ endlich ist. Mit $Z = Y \times_A X$ haben wir eine relative, glatte Kurve mit Schnitt σ

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, shift right, "g"'] \\ Y \arrow[u, shift right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Weiter sei $\pi : Z \to X$ die endliche Projektion. Man kann nun o.B.d.A. zu einem offenen Unterschema von X übergehen und somit annehmen, dass das abgschlossene Unterschema $\sigma(Y)$ durch einen Schnitt $t \in \mathcal{O}_Z(Z)$ induziert wird. Sei nun $Q = Z - \sigma(Y)$ und $g' : Q \to Y$ die Einschränkung von g. Wir betrachten die K-Korrespondenz

$$H : Y \Longrightarrow^{g'^*} Q \Longrightarrow^{\{t\}} Q \Longrightarrow^{j_*} Z \Longrightarrow^{\pi_*} X$$

Es ist klar, dass H einen Homomorphismus

$$H : C_p(Y, n) \longrightarrow C_{p+1}(X, n+1)$$

induziert für. Wir behaupten, dass es sich dabei um eine Nullhomotopie von i_* handelt. Nach Proposition 1.5.3 vertauscht in H jeder Faktor mit dem Differential bis auf $\{t\}$ (hier bekommen wir ein zusätzliches Vorzeichen) und j_* (j ist nicht eigentlich). Man rechnet aber leicht nach, dass

$$j_* \circ d_Q - d_Z \circ j_* = -\sigma_* \circ \partial_Y^Q \,.$$

Insgesamt:

$$d_Y \circ H + H \circ d_X = \pi_* \circ \sigma_* \circ \partial_Y^Q \circ \{t\} \circ g'^* = \pi_* \circ \sigma_* = i_*$$

wobei wir in der zweiten Identität Lemma 3.5.2 verwendet haben.
Damit ist der Beweis von Lemma 3.6.2 beendet. □

Der Beweis von Theorem 3.6.1 ist nun nicht mehr schwer. Sei $d = dim(X)$ und betrachte Paare (U, x) mit einem glatten Schema U von endlichem Typ über einem Körper, $x \in U$ erfülle $Spec(\mathcal{O}_{U\,x}) \cong X$.
Da die K-Theorie verträglich mit direkten Limites von Ringen ist, gilt

$$C_p(X,n) = \varinjlim_{(U,x)} C_p(U,n) \ .$$

Außerdem hat man

$$C_p(U,n) = \varinjlim_{Y} C_p(Y,n) \ ,$$

wobei Y über die abgeschlossenen Unterschemata von U der Dimension p läuft. Insgesamt ist

$$A^{d-p}(X) = \varinjlim_{(U,x)} \varinjlim_{Y} A_p(Y) = 0 \ ,$$

da nach Lemma 1.6.2 $A_p(Y) \to A_p(U)$ der Nullhomomorphismus ist (nach eventueller Verkleinerung von U). □

3.7 Endliche Körper

Da der im letzten Abschnitt verwendete Normalisierungssatz nicht über endlichen Körpern funktioniert, kann man entweder einen komplizierteren Normalisierungssatz zu Rate ziehen (siehe [Quil73]) oder, wie wir es vorziehen, einen Standardtrick benutzen, um Theorem 3.6.1 zu beweisen.
Das hier Behandelte wird sich vor allem im Zusammenhang mit der Gerstenvermutung über endlichen Körpern in Kapitel 5 als interessant erweisen.

Die Idee ist, folgende Sequenz zu benutzen:

$$0 \longrightarrow K_n^M(A) \xrightarrow{i_*} K_n^M(A(t)) \xrightarrow{i_{1*}-i_{2*}} K_n^M(A(t_1,t_2)) \ . \tag{3.9}$$

Hier ist A ein Ring $A(t)$ sei die Lokalisierung von $A[t]$ an der Menge S der Polynome, deren Koeffizienten das Ideal (1) in A erzeugen – es ist nicht schwer zu sehen, dass S ein multiplikatives Monoid ist.[4] $i : A \to A(t)$ ist die Einbettung und $i_1(t) = t_1$, $i_2(t) = t_2$.
Mit einer Variante der folgenden Proposition kann man den Beweis von Theorem 3.6.1 leicht auf endliche Körper k erweitern, indem man den Basiswechsel $k \to k(t)$ vollzieht. Genauer gesagt zeigt man, dass für die Basiserweiterung $g : X_{k(t)} \to X$ der Homomorphismus

$$g^* : A^p(X) \longrightarrow A^p(X_{k(t)})$$

injektiv ist.

[4] Man sieht dies z.B., wenn man beachtet, dass ein Polynom genau dann in S ist, wenn modulo beliebiger maximaler Ideale von A die Koeffizienten nicht alle verschwinden.

3.7.1 Proposition

Sei A ein beliebiger Körper oder ein lokaler Ring mit unendlichem Restkörper. Dann ist (3.9) exakt.

Beweis. Im Fall, dass A ein Körper ist, verwende Lemma 1.2.2, um ein Inverses zu i_* auf dem Kern von $i_{1\,*} - i_{2\,*}$ zu definieren.
Falls A lokal mit unendlichem Restkörper F ist, wähle zu $[\alpha] \in \ker(i_{1\,*} - i_{2\,*})$, $\alpha \in A(t)^n$, ein $x \in F$, so dass man t durch x ersetzen kann in α und ein Element aus $K_n^M(A)$ bekommt; weiter sei x so gewählt, dass man es auch für t_1 in den Steinbergrelationen, die $i_1(\alpha)$ und $i_2(\alpha)$ verbinden, einsetzen kann. Dann ist klar, dass $\alpha\,|_{t=x}$ unabhängig von x und dem Repräsentante α ist. Damit haben wir ein Inverses zu i_* auf $\ker(i_{1\,*} - i_{2\,*})$ konstruiert. $\square$

Schließlich formulieren wir ein Problem, das von Gabber angesprochen wird [Gab98] und geben einen Beweis für einen Spezialfall.

3.7.2 Vermutung

Für jeden lokalen Ring mit genügend großem Restkörper ist (3.9) exakt.

Tatsächlich kann ich mit Hilfe der Theorie des Transfers für die Milnor K-Theorie von lokalen Ringen folgende Proposition beweisen. Der volle Beweis ist leider recht lang.

3.7.3 Proposition

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N > 0$, so dass die Sequenz (3.9) exakt ist für alle lokalen Krull-Bereiche (A, m) mit $|A/m| > N$.

Beweisidee. Wir definieren unter der Bedingung, dass der Restkörper von A groß genug ist, eine Norm

$$N_{A'/A} : K_n^M(A') \longrightarrow K_n^M(A)$$

für einen lokalen Ring A' und eine quadratische oder kubische Ringerweiterung $A \subset A'$. Dabei benötigen wir nur eine fixe von $A \subset A'$ unabhängige Anzahl von Elementen im Restkörper von A, wie man aus dem Beweis von Theorem 2.1.3 und des Faktorisierungslemmas 6.1.1 ersieht.
Sei $\bar{A}$ ein direkter Limes von einer unendlichen Kette von quadratischen oder kubischen lokalen, unverzweigten Ringerweiterungen von A.

Dann haben wir folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & K_n^M(\bar{A}) & \xrightarrow{i_*} & K_n^M(\bar{A} \otimes_A A(t)) & \xrightarrow{i_{1\,*} - i_{2\,*}} & K_n^M(\bar{A} \otimes_A A(t_1, t_2)) \\
\Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow \\
0 & \longrightarrow & K_n^M(A) & \xrightarrow{i_*} & K_n^M(A(t)) & \xrightarrow{i_{1\,*} - i_{2\,*}} & K_n^M(A(t_1, t_2))\ .
\end{array}$$

Die obere Sequenz ist nach Proposition 3.7.1 exakt. Wenn wir dieses Diagramm für quadratische und kubische Erweiterungen bilden und die Norm benutzen, ergibt eine einfache Diagrammjagd die gewünschte Proposition.

□

Kapitel 4

Die Gerstenvermutung

Die Gerstenvermutung für die Milnor K-Theorie besagt, dass der Gerstenkomplex des letzten Kapitels die Milnor K-Garbe $\mathcal{K}_*^M$ eines regulären, exzellenten Schemas auflöst, d.h. dass mit der Notation aus Abschnitt 3.3 gilt, dass

$$0 \longrightarrow K_n^M(A) \longrightarrow C_d(A,n) \longrightarrow C_{d-1}(A,n-1) \longrightarrow \cdots$$

exakt ist für einen regulären, lokalen Ring A mit $\dim(A) = d$, $n \geq 0$. Womöglich muss man noch fordern, dass der Restkörper von A genügend Elemente enthält.

In dieser Allgemeinheit ist die Vermutung heute allerdings unerreichbar – sie ist noch nicht einmal für die Quillen K-Theorie bewiesen, falls A nicht äquicharakteristisch ist.

Gut verstanden ist hingegen die Exaktheit der Sequenz

$$K_n^M(A) \longrightarrow K_n^M(Q(A)) \longrightarrow \textstyle\sum_{x \in Spec(A)^{(1)}} K_{n-1}^M(x) \tag{4.1}$$

für einen lokalen, glatten Ring A von geometrischem Typ über einem unendlichen Körper.[1]

Die Exaktheit von (4.1) wurde unabhängig von O. Gabber [Gab98] und Ph. Elbaz-Vincent/S. Müller-Stach [ElbMül02] bewiesen.

Ziel dieses Kapitels ist, einen neuen relativ kurzen Beweis der Exaktheit von (4.1) zu geben sowie Gabbers Beweis ausführlich darzulegen. Die Idee zu ersterem stammt von Elbaz-Vincent und Müller-Stach.

Gabbers Beweis ist recht elementar und benutzt lediglich einige Normalisierungssätze vom Noether-Typ aus der algebraischen Geometrie.

[1] Tatsächlich genügt es zu fordern, dass A semi-lokal mit unendlichen Restkörpern ist.

4.1 Der Beweis von Elbaz-Vincent und Müller-Stach

4.1.1 Theorem

Sei A ein semi-lokaler, glatter Ring von geometrischem Typ über einem Körper F, $X = Spec(A)$. Außerdem habe A unendliche Restkörper. Dann ist die Sequenz

$$K_n^M(A) \longrightarrow K_n^M(Q(A)) \xrightarrow{(\partial_x)} \oplus_{x\in X^{(1)}} K_{n-1}^M(x) \tag{4.2}$$

exakt.

Der in diesem Abschnitt gegebene Beweis für dieses Theorem ist eine Kombination der Methoden aus [ElbMül02] und einem Faktorisierungstrick. Die Idee stammt von Elbaz-Vincent und Müller-Stach. Natürlich muß betont werden, dass die in [ElbMül02] entwickelten Methoden viel stärker sind als der nachfolgende Trick.
Beweis. Zunächst beachtet man, dass die Zusammensetzung der Abbildungen in (4.2) trivialerweise den Nullhomomorphismus ergibt.
Zur Vereinfachung wird im Folgenden angenommen, dass A lokal ist, $X = Spec(A)$. Ein Element

$$x \in \ker(K_n^M(Q(A)) \to \oplus_{x\in X^{(1)}} K_{n-1}^M(x))$$

ist nach Theorem 3.2.2 und den Bemerkrungen danach gleichwertig zu einem Element $x' \in CH^n(Spec(A), n)$.
Zu zeigen ist dann nur noch, dass der in 3.2.2 angegebene Homomorphismus

$$CH^n(Spec(A), n) \subset CH^n(Spec(Q(A)), n) \longrightarrow K_n^M(Q(A)) \tag{4.3}$$

das Element x' über $K_n^M(A)$ faktorisiert.
Dazu benutzen wir ein Movinglemma von Marc Levine (siehe [ElbMül02, Lemma 3.11; Levine...])

4.1.2 Lemma

Jeder Zykel aus $CH^n(Spec(A), n)$ ist äquivalent zu einer Summe von irreduziblen Zykeln $z \in CH^n(Spec(A), n)$ der Form

1. *z trifft die Seiten des Standardkubus nicht und ist endlich, surjektiv über $Spec(A)$.*

2. *Der Koordinationring von z hat eine Filtrierung*

$$A \subset A[y_1] \subset A[y_1, y_2] \subset \cdots \subset A[y_1, \ldots, y_n]$$

bestehend aus glatten Algebren über F.

Wenn wir den Zykel x' in eine Summer von irreduziblen Zykeln z wie im letzten Lemma zerlegen, müssen wir nur noch zeigen, dass der Homomorphismus (4.3) solche Zykel auf Elemente aus $K_n^M(A)$ abbildet. Einem z entspricht aber ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in (A'^*)^n$ mit einem glatten Ring $A' = R[y_1, \ldots, y_n]$ wie im Lemma und der besagte Homomorphismus bildet dieses n-Tupels auf seine K-theoretische Norm ab.

1. Variante (mit Ringnorm):
Wegen des kommutativen Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(A') & \longrightarrow & K_n^M(Q(A')) \\ {\scriptstyle N_{A'/A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N_{Q(A')/Q(A)}} \\ K_n^M(A) & \longrightarrow & K_n^M(Q(A)) \end{array}$$

aus 2.3.3 (wir iterieren die Norm über die Ringerweiterungen aus 4.1.2(2)) faktorisiert die Abbildung (4.3) z über $N_{A'/A}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \in K_n^M(A)$. Dies war zu zeigen.

2. Variante (ohne Ringnorm):
Wir können das Faktorisierungslemma 6.1.1 direkt verwenden, um zu zeigen, dass die Norm

$$N_{Q(A')/Q(A)} : K_n^M(Q(A')) \longrightarrow K_n^M(Q(A))$$

einen Homomorphismus

$$K_n^M(Q(A'))/K_n^M(A') \longrightarrow K_n^M(Q(A))/K_n^M(A)$$

induziert. Letzteres genügd, um das Theorem zu beweisen.
Dazu sei o.B.d.A. $A' = A[t]/(\pi)$ mit einem normierten, irreduziblen Polynom π und zur Vereinfachung der Notation $n = 2$. Man verfolgt nun die Konstruktion der Norm für ein Element

$$x \in \mathrm{im}(K_2^M(A') \longrightarrow K_2^M(Q(A')))$$

der Form $x = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ mit $x_i \in A[t]$ und $deg(x_i) < deg(\pi)$, $i = 1, 2$.
Dazu faktorisiere man x_i modulo π nach dem Faktorisierungslemma in Polynome $x_i', x_i'' \in A[t]$ vom Grad kleiner $deg(\pi)$ mit invertierbarem höchsten Koeffizienten.
Man kann dann o.B.d.A. annehmen, dass x_1, x_2 bereits normiert waren. Entsprechend der Konstruktion der Norm betrachtet man $\{\pi, x_1, x_2\} \in K_2^M(Q(A)[t])$.
Da die Einträge in letzterem Element Polynome aus $A[t]$ sind, deren höchste Koeffizienten invertierbar sind, rechnet man leicht nach, dass die diskreten Bewertungen bezüglich normierter Polynome $\pi' \in Q(A)[t]$ dieses Element auf 0 abbilden, falls π' nicht in $A[t]$ ist, und in $\mathrm{im}(K_2^M(A[t]/(\pi')) \rightarrow$

$K_2^M(Q(A)[t]/(\pi')))$, falls $\pi' \in A[t]$.
Wenn wir diesen "Algorithmus" weiterverfolgen, können wir folgern, dass es ein Element $y \in K_2^M(Q(A)(t))$ gibt, das durch 2-Tupel von Polynomen aus $A[t]$ mit höchsten Koeffizienten invertierbar erzeugt wird, so dass $x = \partial_\pi(y)$ und $0 = \partial_{\pi'}(y)$ für $\pi' \neq \pi$.
Dann ist aber nach Abschnitt 1.4

$$N_{Q(A')/Q(A)}(x) = -\partial_\infty(y) \in \mathrm{im}(K_2^M(A) \to K_2^M(Q(A))) \ .$$

Dies war zu beweisen. □

4.2 Der Beweis von Gabber I

In diesem Abschnitt geben wir den ersten Teil von Gabbers Beweis [Gab98] des Satzes 4.1.1 wieder.
Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass A lokal und F unendlich ist. Dann besteht der erste Teil des Beweises darin, auf den Fall, dass A der lokale Koordinatenring an einem Punkt einer affinen Varietät $\mathbb{A}^d$ ist, zu reduzieren. Man beachte folgendes Lemma

4.2.1 Lemma

Sei Y eine glatte, affine Varietät und $y \in Y$ ein beliebiger nicht notwendig abgeschlossener Punkt. Falls die Sequenz (4.2) für alle $A = \mathcal{O}_{Y\,y'}$ mit einem abgeschlossenen Punkt $y' \in Y$ exakt ist, ist sie auch für $A = \mathcal{O}_{Y\,y}$ exakt.

Beweis. Im Beweis sei $A = \mathcal{O}_{Y\,y}$. Es sei $\xi \in K_n^M(Q(A))$ mit

$$\xi \in \ker(K_n^M(Q(A)) \longrightarrow \oplus_{Spec(A)^{(1)}} K_{n-1}^M(x))$$

gegeben. Weiter sei D der reduzierte, effektive Divisor auf Y, dessen irreduzible Komponenten den Punkten $x \in Y$ der Codimension eins entsprechen, für die $\partial_x(\xi) \neq 0$.
Dann ist $y \notin D$ nach Voraussetzung. Also ist $\overline{\{y\}} \cap D \neq \overline{\{y\}}$. Somit existiert ein abgeschlossener Punkt $y' \in \overline{\{y\}} - \overline{\{y\}} \cap D$.
Nach Annahme existiert dann $\xi' \in K_n^M(\mathcal{O}_{Y\,y'})$, das nach Lokalisierung ξ ergibt. Da $\mathcal{O}_{Y\,y'} \subset \mathcal{O}_{Y\,y}$ folgt das Lemma. □

Also können wir annehmen, dass $A = \mathcal{O}_{Y\,y}$ für eine affine, glatte Varietät Y/F und einen abgeschlossenen Punkt $y \in Y$ ist.
Zunächst ist klar, dass jedes Element

$$\xi \in \ker(K_n^M(Q(A)) \longrightarrow \oplus_{x \in Spec(A)^{(1)}} K_{n-1}^M(x))$$

von einem Element $\xi_0 \in K_n^M(A[1/f])$ induziert wird ($0 \neq f \in A$), für das $\partial_x(\xi_0) = 0$ für jeden maximalen Punkt $x \in V(f)$.

Nach eventueller Verkleinerung von Y können wir ein Normalisierungslemma [CHK97] benutzen und folgern, dass es einen étalen Morphismus $e : Y \to \mathbb{A}^d_F =: \mathbb{A}$ und ein $f_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}\,e(y)} =: A_1$ gibt, so dass

$$e^* : A_1/(f_1) \longrightarrow A/(f)$$

ein Isomorphismus ist (dies setzt natürlich voraus, dass $(e^*(f_1)) = (f)$).
Man betrachtet nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} K_n^M(A_1) & \longrightarrow & K_n^M(A_1[1/f_1]) & \xrightarrow{(\partial_x)} & \oplus_{x \in V(f_1)^{(0)}} K_{n-1}^M(x) \\ \downarrow & & {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow \\ K_n^M(A) & \xrightarrow{i} & K_n^M(A[1/f]) & \xrightarrow{(\partial_x)} & \oplus_{x \in V(f)^{(0)}} K_{n-1}^M(x) \end{array} \tag{4.4}$$

und beachtet, dass der rechte vertikale Pfeil ein Isomorphismus ist.
Aus dem folgenden Lemma läßt sich mittels einfacher Diagrammjagd schließen, dass es genügd, die Exaktheit von (4.2) für A_1 zu zeigen, um die Exaktheit für A zu folgern.

4.2.2 Lemma

Wir haben

$$K_n^M(A[1/f]) = \mathrm{im}(i) + \mathrm{im}(j) \ .$$

Beweis. Wir fassen A_1 als Unterring von A auf. Sei $f_1 = \phi_1^{e_1} \cdots \phi_k^{e_k}$ eine Zerlegung in Primfaktoren $\phi_j \in A_1$, $j = 1, \ldots, k$.
Jedes Element in $K_n^M(A[1/f])$ kann dann als Summe von

$$\xi = \{u_1, \ldots, u_m, \phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_l}\}$$

geschrieben werden mit $u_j \in A^*$, $j = 1, \ldots, m$, und $m + l = n$.
Um zu zeigen, dass $\xi \in \mathrm{im}(i) + \mathrm{im}(j)$ kann man offensichtlich $m, l > 0$ annehmen, da dies sonst trivial ist.
Andererseits hat man offensichtlich wegen $A_1/(f_1) = A/(f)$

$$A^* = A_1^*(1 + \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_l} A) \ .$$

Somit kann man o.B.d.A. annehmen, dass für alle $j = 1, \ldots, m$ gilt $u_j \in A_1^*$ oder $u_j \in 1 + \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_l} A$.

4.2.3 Lemma

In der obigen Situation gilt (für $n = l + 1$)

$$\{1 + \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_l} A, \phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_l}\} \subset \mathrm{im}(i) \ .$$

Lemma 4.2.3 impliziert, dass $\xi \in \mathrm{im}(i)$, falls mindestens ein $u_j \in 1 + \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_l} A$.
Andernfalls wären alle $u_j \in A_1^*$ und somit $\xi \in \mathrm{im}(j)$. □

Insgesamt bleibt nur noch Lemma 4.2.3 zu beweisen.
Beweis von Lemma 4.2.3. Wir führen eine Induktion über l aus.
l = 1: Sei $g = 1 + \phi_{i_1} a$ mit $a \in A$. Falls a invertierbar, gilt

$$\{g, \phi_{i_1}\} = -\{g, -a\} \in \mathrm{im}(i)$$

wegen der Steinbergrelation $\{g, 1-g\} = 0$.
Falls a nicht invertierbar ist, kann man ohne Einschränkung g durch $(1-\phi_{i_1})\, g = 1 + \phi_{i_1}(a - \phi_{i_1} a - 1)$ ersetzen. Da $a - \phi_{i_1} a - 1 \in A^*$ haben wir diesen Fall auf den eben bewiesenen zurückgeführt.
l > 1: Sei $g = 1 + \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_l} a$. Dann gilt

$$\{g, \phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_l}\} = \{g(1-\phi_{i_1}), \phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_l}\}$$

und wegen $g(1-\phi_{i_1}) = 1 - \phi_{i_1}(1 + \phi_{i_2} \cdots \phi_{i_l} a')$ mit $a' = \phi_{i_1} a - a$ ist

$$\{g(1-\phi_{i_1}), \phi_{i_1}\} = -\{g(1-\phi_{i_1}), 1 + \phi_{i_2} \cdots \phi_{i_l} a'\} \ .$$

Insgesamt folgert man

$$\{g, \phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_l}\} = -\{g(1-\phi_{i_1}), 1 + \phi_{i_2} \cdots \phi_{i_l} a', \phi_{i_2}, \ldots, \phi_{i_l}\}$$

Wenn wir auf die letzten $l-1$ Einträge rechts die Induktionsvoraussetzung anwenden, ergibt sich

$$\{1 + \phi_{i_1} \cdots \phi_{i_l} a, \phi_{i_1}, \ldots, \phi_{i_l}\} \in \mathrm{im}(i) \ .$$

□

4.3 Der Beweis von Gabber II

Um Gabbers Beweis zu beenden, zeigeb wir in diesem Abschnitt Theorem 4.1.1 im Fall, dass A der lokale Koordinatenring an einem abgeschlossenen Punkt $y \in \mathbb{A}^d_F$ ist. Wir führen Induktion über d aus, die sich über den gesamten Abschnitt erstreckt, d.h. dass wir unten immer annehmen, dass die Aussage für Dimension $d-1$ gilt.
Der Fall $d = 0$ ist trivial.
Also sei $d > 0$. Wie in Lemma 4.2.1 erklärt, können wir annehmen, dass y ein abgeschlossener Punkt ist.
Im Beweis benötigen wir eine weitere Variante der Definition der Milnor K-Gruppen.

4.3.1 Definition

Sei X ein irreduzibles Schema mit generischem Punkt η. Setze

$$\bar{K}_n^M(X) = \ker(K_n^M(\eta) \longrightarrow \oplus_{x \in X^{(1)}} K_{n-1}^M(x)) \ .$$

Ein Element

$$\xi \in \ker(K_n^M(Q(A)) \xrightarrow{(\partial_x)} \oplus_{x \in Spec(A)^{(1)}} K_{n-1}^M(x))$$

ist das gleiche wie ein Element in $\bar{K}_n(Spec(A))$. Letzteres läßt sich aber zu einem Element aus $\bar{K}_n^M(U)$ erweitern, wobei $U \subset \mathbb{A}_F^d$ ein offenes, affines Unterschema ist, $y \in U$.
Seien D_i, $i = 1, \ldots, \lambda$ die Primdivisoren aus $\mathbb{A}_F^d - U$, η_i die generischen Punkte von D_i. Dann ist klar, dass $\partial_{\eta_i}(\xi) \in K_n^M(\eta)$ Lokalisierungen von Elementen aus $K_n^M(H^0(\Omega_i))$ sind mit offenen, affinen, dichten Unterschemata $\Omega_i \subset D_i$, $\Omega_i \cap D_j = \varnothing$ für $i \neq j$.
Nach einem einfachen Normalisierungslemma gibt es eine lineare Koordinatentransformation des $\mathbb{A}_F^d$, so dass die Projektion p auf $d-1$ Koordinaten die folgende Gestalt hat:

1. p ist endliche auf D_i für $i = 1, \ldots, \lambda$.
2. $p(y) \notin p(D_i - \Omega_i)$ für $i = 1, \ldots, \lambda$.

Folgendes technisches Lemma beendet Gabbers Beweis des Theorems 4.1.1.

4.3.2 Lemma

Sei R ein lokaler Ring der Dimension d an einem abgeschlossenen Punkt y' einer glatten Varietät und $y \in \mathbb{A}^1_{\mathbf{k}(y')}$ ein Punkt in der abgeschlossenen Faser von $p : \mathbb{A}^1_R = Spec(R[t]) \to Spec(R)$.
D_i, $i = 1, \ldots, \lambda$, seien Primdivisoren auf $\mathbb{A}^1_R$, endlich über $Spec(R)$, die y nicht enthalten.
Sei $\xi \in K_n^M(Q(R[t]))$ gegeben, so dass gilt

1. *Sei η_i der generische Punkt von D_i. Dann ist $\partial_{\eta_i}(\xi)$ induziert durch ein Element aus $K_{n-1}^M(H^0(D, \mathcal{O}_D))$.*
2. *Falls η von Codimension eins ist, aber auf keinem der D_i, $i = 1, \ldots, \lambda$ liegt, gilt*
$$\partial_\eta(\xi) = 0 \ .$$

Dann wird ξ durch ein Element aus $K_n^M(\mathbb{A}^1_{R y})$ induziert.

Beweis. Da R faktoriell ist, ist auch $R[t]$ faktoriell, so dass $D_i = V(p_i)$ für ein Primelement $p_i \in R[t]$. Da D_i endlich über R ist, muss p_i vor der höchsten

Potenz eine Einheit haben. Also seien die p_i o.B.d.A. normiert.
Auf Grund von Bedingung 1 und Theorem 2.1.3 existiert $\zeta \in K_n^t(R)$, so dass für jedes normierte Polynom $\pi \in R[t]$ gilt $\partial_\pi(\zeta) = \partial_\pi(\xi)$.[2]
Aus dem Beweis von Theorem 2.1.3 sieht man leicht, dass man ζ so wählen kann, dass es ein Element in $K_n^M(\mathbb{A}^1_{R\,y})$ induziert, denn y liegt nicht auf den D_i.
Somit genügd es den Fall zu betrachten, dass $\partial_\eta(\xi) = 0$ für alle $\eta \in \mathbb{A}^1_R$ der Codimension eins.

4.3.3 Lemma

Der kanonische Homomorphismus

$$\bar{K}_n^M(Spec(R)) \longrightarrow \bar{K}_n^M(\mathbb{A}^1_R)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Milnors exakter Sequenz

$$0 \longrightarrow K_n^M(Q(R)) \longrightarrow K_n^M(Q(R)(t)) \longrightarrow \oplus_\pi K_{n-1}^M(Q(R)[t]/(\pi)) \longrightarrow 0\ .$$

oder der Homotopieinvarianz der höheren Chowgruppen. □

Nach dem Lemma wird ξ durch ein Element aus $\bar{K}_n^M(R)$ induziert, das wiederum nach der globalen Induktion über d durch ein Element aus $K_n^M(R)$ induziert wird. □

[2] Man beachte, dass man für diese Aussage nicht den komplizierten Teil von Theorem 2.1.3 benötigt, sondern mit einem Argument analog zu 4.1 (2. Variante) auskommt.

Kapitel 5

Ausblick

Der erste Teil dieses Kapitels beschäftigt sich mit dem Beweis des noch offenen Teils der Gerstenvermutung, d.h. der Injektivität von

$$K_n^M(A) \longrightarrow K_n^M(Q(A)) \ ,$$

für einen lokalen, regulären Ring A.
Im zweiten Teil wird erklärt, wie man die Ergebnisse aus Kapitel 4 auf lokale Ringe mit nur endlich vielen Elementen im Restkörper verallgemeinern kann. Ebenso behandelt wird der Fall, dass A nur regulär nicht aber glatt ist.

5.1 Die Gerstenvermutung

Mit denen in dieser Arbeit entwickelten Methoden kann man die Gerstenvermutung beweisen. Der Vollständigkeit halber seien die Ergebnisse in voller Allgemeinheit und mit Beweisideen angegeben. Für die lückenlosen Beweise verweise ich auf [ElbKeMül].
Das erste Theorem ist der noch offene Teil der Gerstenvermutung für die Milnor K-Theorie. Das zweite Theorem ist Teil der Beilinsonvermutung über motivische Cohomologie [Beil82]. Für die bereits bekannten Resultate in diese Richtung siehe [ElbMül02].

5.1.1 Theorem

Sei A ein lokaler, regulärer, äquicharakteristischer Ring mit unendlichem Restkörper. Dann ist

$$K_n^M(A) \longrightarrow K_n^M(Q(A))$$

injektiv für alle $n \geq 0$.

5.1.2 Theorem

Sei A ein lokaler, glatter Ring mit unendlichem Restkörper und von geometrischem Typ über einem Körper. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$K_n^M(A) \cong CH^n(Spec(A), n)\ .$$

5.1.3 Theorem (Bloch-Formel)

Sei X eine glatte Varietät über einem unendlichen Körper. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$H^n(X, \mathcal{K}_n^M) \cong CH^n(X)\ .$$

Beweisidee von Theorem 5.1.1. Mit Hilfe eines Satzes von Popescu und eines Normtricks wie in Abschnitt 3.7 reicht es die Injektivität von

$$K_n^M(A) \longrightarrow K_n^M(Q(A))$$

für einen semi-lokalen (!), glatten Ring A von geometrischem Typ über einem perfekten, unendlichen Körper F zu zeigen.
Ähnlich wie in Lemma 4.2.1 erklärt, kann man sich auf den Fall beschränken, dass A der lokale Ring an einem abgeschlossenen Punkt y einer glatten Varietät über F ist. Jetzt benutzt man Induktion über $d = dim(A)$. Nun beweist man, dass das wie in Abschnitt 4.2 konstruierte Quadrat

$$\begin{array}{ccc} K_n^M(A_1) & \longrightarrow & K_n^M(A_1[1/f_1]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_n^M(A) & \longrightarrow & K_n^M(A[1/f]) \end{array}$$

cokartesisch ist. Somit kann man man sich darauf beschränken, dass A der lokale Ring an einem abgeschlossenen Punkt des $\mathbb{A}_F^d$ ist.
Sei also $\xi \in K_n^M(A)$, so dass $0 = i_*(\xi) \in K_n^M(Q(A))$ für die Einbettung $i : A \to Q(A)$. Wir können eine lineare Projektion p wie in Abschnitt 4.3 von $\mathbb{A}_F^d$ auf $\mathbb{A}_F^{d-1}$ wählen, so dass ξ ein Element in $\xi' \in K_n^t(R)$ induziert für $R = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_F^{d-1}\, p(y)}$. Bei geeigneter Wahl von p kann man durch Induktion über d schließen, dass ξ' durch ein Element aus $K_n^M(R)$ induziert wird, das wiederum nach Induktion verschwindet. □

5.2 Endliche Körper

Gabber konnte in [Gab98] Theorem 4.1.1 wie folgt verallgemeinern.
Dazu erinnere man sich an die Sequenz (3.9) aus Abschnitt 3.7

$$0 \longrightarrow K_n^M(A) \xrightarrow{i_*} K_n^M(A(t)) \xrightarrow{i_{1*}-i_{2*}} K_n^M(A(t_1,t_2))$$

und definiere

$$\tilde{K}_n^M(A) = \ker(i_{1*} - i_{2*})$$

für einen Ring A.
Dann beweist Gabber

5.2.1 Theorem

Sei A ein lokaler glatter Ring von geometrischem Typ über einem Körper, $X = Spec(A)$. Dann ist die Sequenz

$$\tilde{K}_n^M(A) \longrightarrow K_n^M(Q(A)) \longrightarrow \oplus_{x\in X^{(1)}} K_{n-1}^M(x)$$

exakt.

Im Theorem ist die linke Abbildung mittels Proposition 3.7.1 induziert.
Daraus kann man dann mittels Proposition 3.7.3 unmittelbar folgern, dass Theorem 4.1.1 auch gilt, falls der Restkörper von A genügend groß ist in Abhängigkeit von n.[1]
Mit Hilfe des Tricks von Popescu kann man jetzt Theorem 4.1.1 auf reguläre aber nicht notwendig glatte Ringe verallgemeinern.

5.2.2 Theorem

Sei A ein lokaler, regulärer, äquicharakteristischer Ring, $X = Spec(A)$. Außerdem habe A unendlich viele Elemente im Restkörper. Dann ist die Sequenz

$$K_n^M(A) \longrightarrow K_n^M(Q(A)) \xrightarrow{(\partial_x)} \oplus_{x\in X^{(1)}} K_{n-1}^M(x) \tag{5.1}$$

exakt.

Beweis. Mit Hilfe eines Satzes von Popescu reduziert man den Beweis auf den Fall, dass A von geometrischem Typ über einem Primkörper ist. Über perfekten Körpern ist regulär bekanntlich das gleiche wie glatt. Da nach der eben gemachten Bemerkung eine große endliche Anzahl von Elemente im Restkörper von A genügen, folgt das Theorem. □

[1] Dies hätte man mit einem Trick wie in Proposition 3.7.3 auch direkt zeigen können. Auf diese Diagrammjagd möge der Leser sich bei Interesse alleine wagen.

Kapitel 6

Anhang (Algebra)

6.1 Faktorisierungslemma

Sowohl in Kapitel 2 als auch in Kapitel 4 wird immer wieder ein Faktorisierungsargument benutzt. Soweit dem Autoren bekannt taucht es in diesem Zusammenhang zum ersten Mal bei [Gab98] auf. Hier eine wesentliche Verallgemeinerung seines Resultats.

6.1.1 Theorem

Sei A ein semi-lokaler Ring mit unendlichen Restkörpern, $\pi \in A[t]$ vom Grad $d > 2$ mit höchstem Koeffizienten invertierbar. Jedes $[p] \in (A[t]/\pi)^*$, $p \in A[t]$ vom Grad kleiner d, kann man schreiben als

$$p = f\,\pi + p_1\,p_2$$

mit $f, p_1, p_2 \in A[t]$, $deg(f) = d-2$, $deg(p_i) = d-1$ und den höchsten Koeffizienten von f, p_1, p_2 invertierbar in A. Weiter kann man verlangen, dass $Disc(p_1\,p_2) \in A^*$ und in $(p, f\,\pi, p_1, p_2)$ je zwei Elemente coprim sind.

Beweis. Man kann annehmen, dass A ein unendlicher Körper ist (Chinesischer Restsatz). Die Menge der Polynome p_1 vom Grad kleiner gleich $d-1$ wird mit $\mathbb{A}_A^{d-1}$ identifiziert. Die Menge der p_1, die modulo π invertierbar sind, ist dann eine zariski-offene Untermenge von $\mathbb{A}_A^{d-1}$. Jedem solchen p_1 entspricht dann offenbar algebraisch ein p_2 invertierbar modulo π. Da über dem unendlichen Körper A jede zariski-offene Untermenge von $\mathbb{A}_A^{d-1}$ einen A-rationalen Punkt hat, ist damit die erste Behauptung bewiesen. Denn die Menge der p_i, die höchsten invertierbaren Koeffizienten haben, ist natürlich auch zariski-offen und der Durchschnitt von endlich vielen nicht-leeren, zariski-offenen Mengen ist dicht und zariski-offen in $\mathbb{A}_A^{d-1}$. Die Aussage über f folgt automatisch.

Das Problem, das auftritt, wenn man versucht die Faktorisierung so zu wählen, dass die angegebenen Elemente coprim sind, ist, dass z.B. die Bedingung p coprim zu f zariski-offen ist (f hängt algebraisch von der Faktorisierung ab), nicht aber p_1 coprim zu p_2. Damit man doch eine algebraische Bedingung erhält, muss man die Resultante benutzen.
Jetzt zeigen wir beispielhaft, dass wir die Faktorisierung generisch sogar so wählen können, dass (angenommen $p_i(0) \neq 0$)

$$Res_{d-1,d-1}(t^{d-1}\, p_1(1/t), t^{d-1}\, p_2(1/t)) \neq 0 \; .$$

Wir beschränken uns auf $char(A) = 0$. Wähle $x_0 \in A$ mit $p(x_0), \pi(x_0) \neq 0$. Sei $f = p(x_0)/\pi(x_0) \in A$.
Weiter können wir x_0 so wählen, dass $p'(x_0) - f\,\pi'(x_0) \neq 0$ (hier benutzen wir $char(A) = 0$) und $p(0) - f\,\pi(0) \neq 0$. Dann wählen wir $p_1 = t - x_0$. Die obige Resultantenbedingung ist damit als erfüllbar und somit generisch erfüllbar gezeigt (für $p_i(0) \neq 0$). □

6.2 EGA IV

In diesem Abschnitt werden einige Resultate der Kommutativen Algeba in Erinnerung gerufen. Zunächst benötigten wir bei der Konstruktion der Norm für semi-lokale, reguläre Ringe und unverzweigte, endliche Homomorphismen, dass letztere immer durch ein Element erzeugt werden.

6.2.1 Lemma (Chevalley)

Sei $A \subset B$ eine endliche, unverzweigte Erweiterung von regulären, semilokalen Ringen mit unendlichen Restkörpern. Dann gibt es ein normiertes Polynom $f \in A[t]$ mit $A[t]/(f) \cong B$, so dass $[f'] \in (A[t]/(f))^*$ ist.

Beweis. Eine einfache Variation von [EGA IV, Proposition 18.4.5]. □

In Katos Konsturktion des Gerstenkomplexes benötigten wir einen Satz von Cohen.

6.2.2 Theorem (Cohen)

Sei A ein vollständiger, lokaler, noetherscher Integritätsring. Dann existiert ein Unterring $B \subset A$, der isomorph zu einem formalen Potenzreihenring über einem Körper bzw. vollständigem, diskreten Bewertungring ist. Dabei kann man annehmen, dass $B \subset A$ ein lokaler, endlicher Homomorphismus ist und dass die Restkörper übereinstimmen.

Beweis. Siehe [EGA IV, Theorem 19.8.8]. □

Literaturverzeichnis

[BT73] Bass, H.; Tate, J. *The Milnor ring of a global field.* Algebraic K-theory, II (Proc. Conf., Seattle, Wash., Battelle Memorial Inst., 1972), pp. 349–446. Lecture Notes in Math., Vol. 342, Springer, Berlin 1973.

[Beil82] Beilinson, Alexander; Brief an Soulé (1982). K-Theory Preprint Archives 694

[Bloch86] Bloch, Spencer *Algebraic cycles and higher K-theory.* Adv. in Math. 61 (1986), no. 3, 267–304.

[BlochOgus75] Bloch, Spencer; Ogus, Arthur *Gersten's conjecture and the homology of schemes.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7 (1974), 181–201 (1975).

[CHK97] Colliot-Thélène, Jean-Louis; Hoobler, Raymond T.; Kahn, Bruno *The Bloch-Ogus-Gabber theorem.* Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996), 31–94, Fields Inst. Commun., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[ElbKeMül] Elbaz-Vincent, Philippe; Kerz, Moritz; Müller-Stach, Stefan (In Vorbereitung)

[ElbMül02] Elbaz-Vincent, Philippe; Müller-Stach, Stefan *Milnor K-theory of rings, higher Chow groups and applications.* Invent. Math. 148 (2002), no. 1, 177–206.

[Ful98] Fulton, William *Intersection theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Gab98] Gabber, O., Brief an B. Kahn (1998)

[GeiLev00] Geisser, Thomas; Levine, Marc *The K-theory of fields in characteristic p.* Invent. Math. 139 (2000), no. 3, 459–493.

[EGA] Grothendieck, A. *Éléments de géométrie algébrique I-IV.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1960-1967

[HilSt97] Hilton, P. J.; Stammbach, U. *A course in homological algebra.* Graduate Texts in Mathematics, 4. Springer-Verlag, New York, 1997.

[Kato80] Kato, Kazuya *A generalization of local class field theory by using K-groups. II.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (1980), no. 3, 603–683.

[Kato86] Kato, Kazuya *Milnor K-theory and the Chow group of zero cycles.* Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), 241–253, Contemp. Math., 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[Ker90] Kersten, Ina *Brauergruppen von Körpern.* Aspects of Mathematics, D6. Vieweg, Braunschweig, 1990.

[Milnor69] Milnor, John *Algebraic K-theory and quadratic forms.* Invent. Math. 9 1969/1970 318–344.

[NesSus89] Nesterenko, Yu. P.; Suslin, A. A. *Homology of the general linear group over a local ring, and Milnor's K-theory.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 53 (1989), no. 1, 121–146

[Pfis00] Pfister, A. *On the Milnor conjectures: history, influence, applications.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 102 (2000), no. 1, 15–41.

[Quil73] Quillen, Daniel *Higher algebraic K-theory. I.* Algebraic K-theory, I (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), pp. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer, Berlin 1973.

[Rost96] Rost, Markus *Chow groups with coefficients.* Doc. Math. 1 (1996)

[Tot92] Totaro, Burt *Milnor K-theory is the simplest part of algebraic K-theory.* K-Theory 6 (1992), no. 2, 177–189.

[vdKal77] van der Kallen, Wilberd *The K_2 of rings with many units.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 10 (1977), no. 4, 473–515.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die bei der Erstellung dieser Arbeit verwendeten Hilfsmittel und Quellen angegeben habe. Ich habe die Arbeit selbständig verfasst.