2019–07–26

Hélène Esnault erhält die Cantor-Medaille 2019

In diesem Jahr verleiht die Deutsche Mathematiker-Vereinigung die Cantor-Medaille an Prof. Dr. Hélène Esnault (FU Berlin). Die Cantor-Medaille wird höchstens alle zwei Jahre verliehen und stellt die höchste Auszeichnung dar, die die DMV für herausragende wissenschaftliche Leistungen vergibt. Die Preisverleihung findet während der DMV-Jahrestagung im September 2019 statt.

Hélène Esnault ist in Ivry, einem Arbeitervorort von Paris aufgewachsen. Ab 1973 studierte sie an der École normale supérieure in Paris. Seit 1983, dem Jahr, in dem Sie eine Stelle am Max-Planck-Institut in Bonn übernahm, ist sie fast durchgehend in Deutschland wissenschaftlich aktiv, ab 1990 als Professorin an der Universität Essen, später mit einer renommierten Einstein-Professur an der Freien Universität Berlin.

Ich habe Hélène als Postdoktorand in Essen kennengelernt. Dort hat sie mit Eckart Viehweg eine außergewöhnliche internationale Arbeitsgruppe aufgebaut. Zusammen sind sie 2003 für ihre Leistungen mit dem Leibniz-Preis der Deutschen Forschungsgemeinschaft ausgezeichnet worden.

Für mich war und ist es ein großes Privileg, mit ihr zu arbeiten und an ihrer Mathematik teilzuhaben. Ich freue mich deswegen sehr anlässlich der Verleihung der Cantor-Medaille 2019 an Hélène Esnault aus ihrem beeindruckenden Werk mit über 130 Veröffentlichungen zwei Themen herauszugreifen, die hoffentlich ein klein wenig repräsentativ einen Eindruck ihrer Arbeit vermitteln.

Hélène Esnault arbeitet im Bereich der algebraischen und arithmetischen Geometrie. Wie ein roter Faden zieht sich dabei durch ihre Arbeit die Verbindung von Einsichten der komplexen Geometrie mit arithmetischen Fragen in positiver Charakteristik, besonders über endlichen Körpern.

1. Rationale Punkte über endlichen Körpern

Als erstes möchte ich die Arbeit *Varieties over a finite field with trivial Chow group of 0-cycles have a rational point* von Hélène Esnault aus dem Jahr 2003 vorstellen [4]. Die gesamte Veröffentlichung besteht nur aus fünf Seiten und liefert in gewisser Weise eine Antwort auf die Frage nach geometrischen Kriterien für die Lösbarkeit von polynomialen Gleichungen über endlichen Körpern.

Wir betrachten einen endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^s$ Elementen, z.B. den Restklassenkörper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Hier ist p eine Primzahl. Für ein homogenes Polynom $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ vom Grad $d > 0$ kann man fragen, ob dieses neben der offensichtlichen Nullstelle $f(0, \ldots, 0) = 0$ noch eine weitere Nullstelle besitzt.

Beispiel 1. Ein einfaches Beispiel, bei dem es keine weitere Nullstelle gibt, ist das Polynom $f(x) = x_1^{p-1} + \cdots + x_n^{p-1}$ über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für $n \leq p-1$, denn nach dem kleinen Satz von Fermat ist $t^{p-1} = 1$ für $0 \neq t \in \mathbb{F}_p$, somit ist $f(a)$ kongruent zur Anzahl der nicht verschwindenden Komponenten von $a \in \mathbb{F}_p^n$.

Dickson (1909) [3] und Artin (1935) formulieren die Vermutung, dass dieses Beispiel das „extremste“ darstellt, was der Existenz einer weiteren Nullstelle entgegensteht. Genauer gesagt vermuten sie folgendes Resultat, welches noch im Jahr 1935 durch Chevalley bewiesen wird [2].

Satz 2. *Für einen endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ und ein homogenes Polynom $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ vom Grad $0 < d < n$ gibt es ein Nullstelle $f(a) = 0$ mit $0 \neq a \in \mathbb{F}_q^n$.*

Hier ist ein bestechend konziser Beweis des Satzes nach Ax (1964) [1]: Die Anzahl N_f der Nullstellen von f erfüllt die Kongruenz

$$N_f \equiv \sum_{a \in \mathbb{F}_q^n} (1 - f(a)^{q-1}) \mod p, \tag{1}$$

da wieder nach dem kleinen Satz von Fermat für $t \in \mathbb{F}_q$ gilt

$$t^{q-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t \neq 0. \end{cases}$$

Da das Polynom $1 - f(x)^{q-1}$ den Grad $d(q-1)$ hat, muss jedes dort vorkommende Monom $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ die Eigenschaft erfüllen, dass $i_j < q-1$ für mindestens ein j ist, sagen wir für $j = 1$. Nun liefert aber dieses Monom den Beitrag

$$\sum_{a \in \mathbb{F}_q^n} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} = (\cdots) \cdot \sum_{a_1 \in \mathbb{F}_q} a_1^{i_1}$$

zur rechten Seite von (1). Wir zeigen, dass dieser Beitrag verschwindet, indem wir ein $t \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ wählen mit $t^{i_1} \neq 1$, was wegen $i_1 < q - 1$ immer möglich ist, und schreiben

$$(1 - t^{i_1}) \sum_{a_1 \in \mathbb{F}_q} a_1^{i_1} = \sum_{a_1 \in \mathbb{F}_q} a_1^{i_1} - \sum_{a_1 \in \mathbb{F}_q} (ta_1)^{i_1} = 0.$$

Wir haben somit gezeigt, dass die rechte Seite von (1) in $\mathbb{F}_q$ verschwindet, somit ist N_f durch p teilbar. Da N_f wegen der trivialen Lösung größer als Null ist, haben wir den Satz von Chevalley bewiesen.

Um das Ergebnis von Hélène Esnault zu verstehen, müssen wir das Problem geometrischer fassen. Die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ liefert eine Varietät $X = V(f)$ im projektiven Raum $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}_q}$. Man kann hier $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}_q}$ als den Raum der eindimensionalen $\overline{\mathbb{F}}_q$-Untervektorräumen von $\overline{\mathbb{F}}_q^n$ auffassen, wobei $\overline{\mathbb{F}}_q$ der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_q$ ist. Wir nehmen im Folgenden immer an, dass X keine Singularitäten besitzt.

Die geometrische Eigenschaft, die die Polynome f im Satz von Chevalley auszeichnet, wird durch folgende Äquivalenz ausgedrückt

$$\mathrm{Grad(f)} < n \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_{V(f)}^{-1} \text{ ist ampel.}$$

Hier ist ω_X für eine glatte Varietät X das sogenannte kanonische Geradenbündel, das die Transformationseigenschaften von Differentialformen vom Grad $\dim(X)$ auf X beschreibt. Varietäten X, für die das Inverse von ω_X ampel ist, nennt man *Fano-Varietäten*. Wir können also den Satz von Chevalley im glatten Fall umformulieren:

> Alle glatten Fano-Hyperflächen im projektiven Raum $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{F}_q}$ haben $\mathbb{F}_q$-rationale Punkte.

Lang und Manin vermuteten dadurch motiviert in den neunziger Jahren, dass sämtliche glatten Fano-Varietäten $\mathbb{F}_q$-rationale Punkte besitzen. Diese Vermutung ist das Hauptresultat aus der oben zitierten Arbeit von Hélène Esnault.

Satz 3 (Esnault)**.** *Sei X eine glatte projektive Fano-Varietät über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$. Dann hat X einen $\mathbb{F}_q$-rationalen Punkt.*

Der Beweis benutzt Rechnungen in Chow-Gruppen von X, die auf Ideen von Spencer Bloch basieren, sowie p-adische Kohomologietheorie. Der Ausgangspunkt ist, dass die Anzahl N_X der $\mathbb{F}_q$-rationalen Punkte durch eine Version der Lefschetzschen Fixpunktformel aus der Topologie beschrieben werden kann, wobei die übliche topologische Kohomologietheorie durch eine p-adische Kohomologietheorie $H^*_{\mathrm{rig}}(X)$ ersetzt wird, die endlich erzeugte $\mathbb{Q}_p$-Vektorräume liefert.

Ein $\mathbb{F}_q$-rationaler Punkt ist nämlich genau ein Fixpunkt der Frobeniusabbildung F, die einen Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$ auf $(a_1^q, \ldots, a_n^q)$ schickt. Man kann wie Lefschetz die Spur von F auf den Kohomologiegruppen betrachten und erhält die berühmte Formel

$$N_X = \sum_{i=0}^{2\dim(X)} (-1)^i \mathrm{tr}(F; H^i_{\mathrm{rig}}(X)).$$

Allgemein ist die Spur von F auf $H^0_{\mathrm{rig}}(X)$ gleich 1 ist und Hélène Esnault zeigt nun geometrisch für eine Fano-Varietät, dass die Spur von F auf den höheren Kohomologiegruppen durch p teilbar ist. Insgesamt sieht man so, dass $N_X \equiv 1 \bmod p$, was natürlich $N_X > 0$ impliziert.

2. Die Gieseker-Vermutung

Der Gieseker-Vermutung aus dem Jahr 1975 [6] stellt eine Verbindung zwischen zwei verschiedenen geometrischen Strukturen einer algebraischen Varietät in positiver Charakteristik her. Diese Vermutung wurde von Hélène Esnault und Vikram Mehta in *Simply connected projective manifolds in characteristic* $p > 0$ *have no nontrivial stratified bundles* (2010) vollständig bewiesen [5]. Die Vermutung von Gieseker wird durch eine einfache gruppentheoretische Beobachtung und deren geometrische Umformulierung für Varietäten über den komplexen Zahlen motiviert, die ich zunächst vorstellen möchte.

Gegeben sei eine endlich erzeugte Gruppe G. Dann zeigt Malcev (1940) [9], bzw. Grothendieck (1970) [7] in allgemeinerer Form, den

Satz 4. *Wenn es in G keine Normalteiler von endlichem Index außer G selbst gibt, so ist jede Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ trivial.*

Für den Beweis benötigen wir lediglich einfache Algebra. Da G endlich erzeugt ist, liegt das Bild von ρ in einer Untergruppe $\mathrm{GL}_r(A)$ wobei $A \subset \mathbb{C}$ eine über den ganzen Zahlen endlich erzeugte Algebra ist. Wenn nun das Bild von ρ nicht-trivial wäre, so gäbe es nach dem verallgemeinerten Hilbertschen Nullstellensatz ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset A$, so dass auch die Komposition $G \to \mathrm{GL}_r(A/\mathfrak{m})$ nicht-triviales Bild hätte. Da aber $A/\mathfrak{m}$ ein endlicher Körper ist, wäre der Kern ein nicht-trivialer Normalteiler von endlichem Index in G.

Spannend wird es, wenn wir diesen Satz geometrisch umformulieren. Wir betrachten dafür eine glatte Varietät X im projektiven Raum $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, d.h. X ist Nullstellenmenge von homogenen komplexen Polynomen. Wir betrachten dann die topologische Fundamentalgruppe $G = \pi_1(X)$, von der man zeigen kann, dass sie endliche erzeugt ist.

Die Untergruppen von G von endlichem Index korrespondieren zu den endlichen Überlagerungen von X, die nach dem Riemannschen Existenzsatz rein algebraischer Natur sind. Die Darstellungen $G \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ lassen sich ebenfalls rein algebraisch beschreiben; zufolge der

Riemann-Hilbert-Korrespondenz entsprechen sie bis auf Isomorphie genau den algebraischen Vektorbündeln E über X zusammen mit einem flachen algebraischen Zusammenhang, d.h. einer Richtungsableitung ∇_ξ auf den Schnitten von E entlang Tangentialvektoren ξ an X.

Wir können also den Satz von Malcev rein algebraisch, geometrisch ohne Verwendung spezieller Eigenschaften der komplexen Zahlen umformulieren.

> Wenn es keine nicht-trivialen endlichen Überlagerungen von X gibt, so gibt es auch keine nicht-trivialen Vektorbündel mit flachem Zusammenhang auf X.

Die Vermutung von Gieseker besagt nun, dass die analoge Aussage für glatte Varietäten X in $\mathbb{P}^n_k$ gilt, wobei k ein algebraisch abgeschlossener Körper positiver Charakteristik ist. Genauer gesagt, gibt es ein kleines Problem mit der „naiven“ Umformulierung in positiver Charakteristik, da sich algebraische Vektorbündel mit Zusammenhang in positiver Charakteristik sonderbar verhalten. Dies wird veranschaulicht in folgendem Beispiel das zeigt, dass Differentialgleichungen in positiver Charakteristik viel zu viele Lösungen haben, um für sich genommen nützlich zu sein.

Beispiel 5. Sei k ein Körper und ∂_x die Ableitung nach der Variablen x auf dem Polynomring $k[x]$, d.h. $\partial_x(x^m) = nx^{m-1}$. Dann gilt für die Lösungsmenge der einfachsten denkbaren Differentialgleichung

$$\{f \in k[x] \,|\, \partial_x(f) = 0\} = \begin{cases} k & \text{in Char. } 0, \\ k[x^p] & \text{in Char. } p > 0. \end{cases}$$

Die Präzisierung in Giesekers Vermutung ist, dass man nach einem Vorschlag von Katz, Vektorbündel mit flachem Zusammenhang in positiver Charakteristik durch sogenannte stratifizierte Bündel ersetzen muss, was einer unendlichen Iteration von Differentialgleichungen entspricht: Differentialgleichungen auf den Lösungen von Differentialgleichungen etc.

Satz 6 (Esnault–Mehta)**.** *Wenn X in $\mathbb{P}^n_k$ eine glatte Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k von positiver Charakteristik ist, und X keine nicht-trivialen endlichen Überlagerungen besitzt, so gibt es auf X auch keine nicht-trivialen stratifizierten Vektorbündel.*

Eine neue Idee im Beweis ist, den Modulraum M aller Bündel auf X zu betrachten. Wenn es dann ein nicht-triviales stratifiziertes Bündel auf X gibt, erzeugt dieses einen abgeschlossenen Unterraum N von

M. Esnault und Mehta zeigen, dass der Frobenius-Morphismus $F : X \to X$ mit $F(a_0, \dots, a_n) = (a_0^p, \dots, a_n^p)$ eine birationale Abbildung $V : N \to N$ induziert. Dies kann man sich so wie im Beispiel vorstellen: Der Frobenius liefert grob gesprochen das Inverse zur Konstruktion der Lösungsmenge einer Differentialgleichung erster Ordnung in positiver Charakteristik. Schließlich reicht es, einen Fixpunkt von V in N zu finden, da ein solcher nach einer Konstruktion von Lange–Stuhler (1977) [8] eine nicht-triviale endliche Überlagerung von X wie in der Kummertheorie erzeugt. Einen solchen Fixpunkt konstruieren Esnault und Mehta nach Reduktion auf einen endlichen Körper k mit Hilfe eines tiefen Satzes von Hrushovski (2004) aus der Modelltheorie.

Literatur

[1] Ax, J. *Zeroes of polynomials over finite fields*, Amer. J. Math. **86** (1964), 255–261.

[2] Chevalley, C. *Démonstration d'une hypothèse de M. Artin,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1935), no. 1, 73–75.

[3] Dickson, L. *On the representation of numbers by modular forms*, Bull. Amer. Math. Soc. **15** (1909), no. 7, 338–347.

[4] Esnault, H. *Varieties over a finite field with trivial Chow group of* 0*-cycles have a rational point*, Invent. Math. **151** (2003), no. 1, 187-191.

[5] Esnault, H., Mehta, V. *Simply connected projective manifolds in characteristic* $p > 0$ *have no nontrivial stratified bundles*, Invent. Math. **181** (2010), no. 3, 449–465.

[6] Gieseker, D. *Flat vector bundles and the fundamental group in non-zero characteristics*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **2** (1975), no. 1, 1–31.

[7] Grothendieck, A. *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*, Manuscripta Math. **2** 1970 375–396.

[8] Lange, H., Stuhler, U. *Vektorbündel auf Kurven und Darstellungen der algebraischen Fundamentalgruppe*, Math. Z. **156** (1977), no. 1, 73–83.

[9] Malcev, A. *On isomorphic matrix representations of infinite groups*, Mat. Sbornik N.S. **8** (50), (1940). 405–422.

Moritz Kerz
Fakultät für Mathematik
Universität Regensburg
93040 Regensburg