I Regulär lokale Ring

1.1 Grundeigenschaften regulär lokaler Ringe

Sei R ein noethersch lokaler Ring mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $K := R/\mathfrak{m}$. Falls M ein R-Modul ist, dann ist $\mathfrak{m}$ der Annihilator von $M/\mathfrak{m}M$ und somit ist dieser ein K-Vektorraum.

Lemma 1.1. (Erzeugte Module über einen lokalen Ring)
Sei M endlich erzeugt und $m_1, \dots, m_n \in M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) M ist erzeugt von $m_1, \dots, m_n$ als R-Modul.

(b) $M/\mathfrak{m}M$ ist erzeugt von $m_1 + \mathfrak{m}M, \dots, m_n + \mathfrak{m}M$ als K-Vektorraum.

Insbesondere haben alle minimalen Erzeugendensysteme von M die selbe Dimension, nämlich $\dim_K(M/\mathfrak{m}M)$.

Beweis: $\Rightarrow$ Klar.
$\Leftarrow$ Nehme (b) an und setzte $N := (m_1, \dots, m_n) \subseteq M$. Mit (b) folgt nun, dass $M \subseteq N + \mathfrak{m}M$, also $M/N \subseteq \mathfrak{m} \cdot M/N$. Mit dem Nakayama Lemma folgt $M/N = \{0\}$, also $M = N$. □

Durch Anwendung des Lemmas 1.1. auf $M = \mathfrak{m}$ erhalten wir, dass jedes minimale Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$ die Dimension $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ hat. Da wir durch den Hauptidealsatz wissen, dass $\mathfrak{m}$ nicht durch weniger als $\dim(R)$ Elemente erzeugt werden kann, bekommen wir

$$\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \geq \dim(R).$$

Definition 1.2. (a) Der lokale Ring R ist regulär, falls

$$\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(R).$$

Also ist R regulär genau dann, wenn $\mathfrak{m}$ von $\dim(R)$ Elementen erzeugt werden kann, was wiederum äquivalent ist zur Bedingung, das R ein System von Parametern enthält, welche $\mathfrak{m}$ erzeugen. Solch ein System von Parametern nennt man **reguläres System von Parametern**.

(b) Sei S ein noetherscher Ring und $X := \mathrm{Spec}(S)$. Ein Element $P \in X$ ist ein **nicht singulärer Punkt**, wenn die Lokalisierung S_P regulär ist. Andererseits nennt man P **singulären Punkt**. Falls X keine singuläre Punkte enthält, nennt man S **regulären Ring**.

(c) Ein Punkt $x \in X$ einer affinen Varietät nennt man **nicht singulär**, wenn die Lokalisierung $K[X]_x$ des Koordinatenrings nach x regulär ist. Andererseits nennt man x **singulär**. Wenn jeder Punkt nicht singulär ist, nennt man X **nicht singulär**.

Beispiel 1.3. Ein Null dimensionaler lokaler Ring ist genau dann regulär, wenn er ein Körper ist.

Satz 1.4. (Assoziierter graduierten Ring und Regularität)
Der lokale Ring R ist genau dann regulär, wenn der assoziierte graduierte Ring $\mathrm{gr}(R)$ isomorph zu einem Polynomring über K ist.

Beweis: Schreibe $A = \mathrm{gr}(R)$. Es gilt $\dim(A) = \dim(R) =: n$.
$\Rightarrow$ Sei R regulär. Damit ist das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ erzeugt von n Elementen. Somit ist A erzeugt von n Elementen als K-Algebra und diese Elementen müssen algebraisch unabhängig sein. Somit ist A isomorph zu einem Polynomring.
$\Leftarrow$ Sei A isomorph zu einem Polynomring. Somit ist A erzeugt von n Elementen $b_1, \ldots, b_n$. Also erhalten wir eine Graduierung $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}_0} A_d$ mit $A_0 \cong K$ und $A_1 \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Wir können davon ausgehen, dass die homogenen Komponenten von Grad 0 von jedem b_i 0 ist. Sei $\pi : A \to A_1$ die Projektion auf die Komponente von Grad 1. Jedes $a \in A$ können wir schreiben als Polynom über K in b_i und somit ist $\pi(a)$ eine K-lineare Kombination von $\pi(b_i)$. Deswegen ist A_1 erzeugt von $\pi(b_1), \ldots, \pi(b_n)$ und wir erhalten $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim_K(A_1) \leq n$. Somit ist R regulär. □

Korollar 1.5. (a) Jeder reguläre lokale Ring ist ein Integritätsring.

(b) Jeder regulär lokale Ring ist normal.

Beweis: (a) Jeder lokale Ring R ist nach Satz 1.4. regulär, wenn der assoziierte graduierten Ring $\mathrm{gr}R$ isomorph zu einem Polynomring P über K ist. P ist ein Integritätsring, deswegen auch $\mathrm{gr}R$ und somit auch R.

(b) Dieser Polynomring P ist auch faktoriell und somit normal. Also ist $\mathrm{gr}R$ normal und somit auch R. □

Bemerkung 1.6. Jeder reguläre lokale Ring ist sogar faktoriell.

Beispiel 1.7. Sei S ein noetherscher Ring und nehme an, dass $P \in \mathrm{Spec}(S)$ in mehr als einer irreduziblen Komponente von $\mathrm{Spec}(S)$ enthalten ist. Das bedeutet, dass P mehr als ein minimales Primideal von S enthält. Wir wissen damit, dass die Lokalisierung S_P mehr als ein minimales Primideal besitzt. Aber da ein Integritätsring nur $\{0\}$ als einziges minimales Primideal hat, ist S_P kein Integritätsring und damit nach Korollar 1.5. nicht regulär. Somit ist P ein singulärer Punkt von $\mathrm{Spec}(S)$.

1.2 Das Jacobi Kriterium

Erinnerung 1.8. (a) Jede algebraische Körpererweiterung eines Körpers von Charakteristik 0 ist separabel.

(b) Ein algebraisches Element α einer Körpererweiterung eines Körpers K mit Charakteristik $p > 0$ ist genau dann separabel, wenn sein Minimalpolynom $\mathrm{irr}(\alpha, K) \in K[x]$ nicht als Polynom in x^p geschrieben werden kann, dh. $\mathrm{irr}(\alpha, K) \notin K[x^p]$.

(c) Eine endlich erzeugte Körpererweiterung L von K ist separabel, wenn eine Transzendenzbasis T so existiert, dass L separabel über $K(T)$ ist, dem Teilkörper erzeugt von T. In diesem Fall nennt man T eine separate Transzendenzbasis.

Proposition 1.9. (a) Jede endlich erzeugte Körpererweiterung eines perfekten Körpers ist separabel.

(b) Falls L eine endlich erzeugte separable Körpererweiterung von K ist, dann enthält jede erzeugende Menge von L über K eine separate Transzendenzbasis.

Beweis: (a) Sei K ein perfekter Körper, der positive Charakteristik p hat. Wir beweisen folgendes durch Induktion über n: Wenn L eine endlich erzeugte Körpererweiterung von K ist mit einer Transzendenzbasis T so, dass L Grad n über dem separablen Abschluss von $K(T)$ in L hat, dann ist L separabel über K. Für $n = 1$ ist dies klar. Sei nun $n > 1$. Das bedeutet, dass es ein $\alpha \in L$ gibt, welches nicht seperabel über $K(T)$ ist, also $g := \mathrm{irr}(\alpha, K(T)) \in K(T)[x^p]$. Wir schreiben T^p für die Menge aller $p$ten Potenz Elemente von T. Wenn alle Koeffizienten von g in $K(T^p)$ liegen, dann wäre g eine $p$te Potenz eines Polynoms in $K(T)[x]$, da nach Annahme jedes Element von K eine $p$te Wurzel in K besitzt. Dies widerspricht der Irreduzibilität von g, also gilt $g \notin K(T^p)[x]$. Nach Lemma 1.10 folgt, dass es eine neue Transzendenzbasis T' so gibt, dass der separable Abschluss von $K(T')$ in L den von $K(T)$ enthält. Da $\alpha \in T'$, ist die Inklusion strikt und die Behauptung folgt aus der Induktion.

(b) Falls $\mathrm{char}(K) = 0$, ist jede Transzendenzbasis separat. In dem Fall $\mathrm{char}(K) = p > 0$ führen wir eine Induktion über den Transzendenzgrad $n := \mathrm{trdeg}(L/K)$ durch. Falls $n = 0$, ist $T = \emptyset$ eine separate Transzendenzbasis nach Annahme. Also nehmen wir $n > 0$ an. Nach Annahme existiert eine separate Transzendenzbasis T. Für jedes Element $\alpha \in L$ ist das Minimalpolynom $\mathrm{irr}(\alpha, K(T))$ separabel, somit gilt, falls alle seine Koeffizienten in dem Teilkörper $K(T^p)$ liegen, dass α separabel über $K(T^p)$ ist. Nehme an, dass dies für jedes Element von einer gegebenen erzeugenden Menge S von L über K passiert. Dann wäre L separabel über $K(T^p)$. Aber jedes Element t von T hat $\mathrm{irr}(t, K(T^p)) = x^p - t^p$, welches inseparabel ist. Dieser Widerspruch zeigt, dass ein Element $\alpha \in S$ so existiert, dass $g := \mathrm{irr}(\alpha, K(T))$ nicht in $K(T^p)[x]$ liegt. Nach Lemma 1.10 gibt es eine neue Transzendenzbasis T', so dass L seperabel über $K(T')$ ist und $\alpha \in T'$. L hat die seperate Transzendenzbasis $T' \setminus \{\alpha\}$, gesehen als die Erweiterung von $K(\alpha)$ und ist weiterhin von

S erzeugt. Nach Induktion hat L eine seperate Transzendenzbasis $T'' \subseteq S$ über $K(\alpha)$, also als Erweiterung von K hat L die seperate Transzendenzbasis $T'' \cup \{\alpha\} \subseteq S$. □

Lemma 1.10. Sei L eine Erweiterung des Körpers K mit Charakteristik $p > 0$. Sei T eine endliche Transzendenzbasis und schreibe T^p für die Menge aller $p$ten Potenzen von Elementen aus T. Wenn das Minimalpolynom $g := \mathrm{irr}(\alpha, K(T))$ von einem $\alpha \in L$ nicht in $K(T^p)[x]$ liegt, dann existiert ein $t \in T$, so dass $T' := (T \setminus \{t\}) \cup \{\alpha\}$ eine neue Transzendenzbasis ist und alle Elemente von L, die seperabel über $K(T)$ sind, sind auch separabel über $K(T')$.

BEWEIS: Da $K[T]$ faktoriell ist, existiert $0 \neq h \in K[T]$, sodass $f := hg \in K[T][x]$ ein primitives Polynom ist und somit nach Gaus Lemma irreduzibel ist. Da h der Leitkoeffizient von f (als Polynom in x) ist, liegt f nicht in $K[T^p][x]$, also existiert ein $t \in T$, sodass f gesehen als Polynom in t separabel ist. Das zeigt, dass t separabel über $K(T')$ ist. Dafür ist T' eine neue Transzendenzbasis und alle Elemente von T sind separabel über $K(T')$. Dies impliziert, dass alle Elemente von L, die separabel über $K(T)$ sind separabel über $K(T')$ sind. □

Unser Ziel ist es, den singulären Lokus (nach Definition die Menge aller singulären Punkte) von dem Spektrum einer affinen Algebra A zu bestimmen. Wenn $A = K[x_1, \ldots, x_n]/I$ gegeben ist durch einen Quotientenring eines Polynomrings über einem Körper, dann ist ein Element von $X := \mathrm{Spec}(A)$ gegeben durch P/I, wobei $P \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Primideal ist mit $I \subseteq P$.

Satz 1.11. (Jacobi Kriterium)
Sei $I = (f_1, \ldots, f_m) \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal in einem Polynomring über einem Körper und sei $P \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Primideal, welches I enthält. Weiterhin sei $Q \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Primideal, das minimal über I ist und in P enthalten ist. Dann gilt

(a) $\mathrm{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mod P\right) \leq \mathrm{ht}(Q)$.

(b) Wenn Gleichheit in (a) gilt, dann ist der lokale Ring $(K[x_1, \ldots, x_n]/I)_{P/I}$ regulär.

(c) Wenn $\mathrm{Quot}(K[x_1, \ldots, x_n]/P)$ eine (nicht notwendig endliche) separable Körpererweiterung von K ist, dann gilt die Rückrichtung in (b). Die Separabilitäts Hypothese ist automatisch gegeben, wenn K ein perfekter Körper ist oder wenn $P = (x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)$ einem Punkt $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{V}_{K^n}(I)$ entspricht.

Anders formuliert: Das Verschwinden der Jacobi Matrix modulo P ist größer gleich der Dimension von jeder irreduziblen Komponente von $\mathrm{Spec}(K[x_1, \ldots, x_n]/I)$, die P enthält, Gleichheit genau dann, wenn der lokale Ring regulär ist. Weiterhin gilt, wenn $P = (x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)$ einem Punkt $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathcal{V}_{K^n}(I)$ entspricht, dann ist die Jacobi Matrix modulo P gegeben durch $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\right) \in K^{m \times n}$.

Lemma 1.12. Sei $P \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Primideal der Höhe m in einem Polynomring über einem Körper.

(a) Es existieren $f_1, \ldots, f_m \in P$, die das lokalisierte Ideal $P_P \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]_P$ erzeugen.

(b) Falls $\mathrm{Quot}(K[x_1,\dots,x_n]/P)$ eine separable Körpererweiterung von K ist, dann gilt

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mod P\right) = m.$$

Beweis: $L := \mathrm{Quot}(K[x_1,\dots,x_n]/P)$ ist als Körpererweiterung von K erzeugt von $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ mit $\alpha_i := x_i+P$. Wir drücken dies aus mit $L = K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Da $K[x_1,\dots,x_n]/P$ Dimension $k := n-m$ hat, hat L Transzendenzgrad k. Da jede erzeugende Menge einer Körpererweiterung eine Transzendenzbasis enthält, nehmen wir an, dass $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ eine Transzendenzbasis bilden, somit sind diese algebraisch unabhängig und L ist eine endliche Erweiterung von $L_0 := K(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$. Wenn L separabel über K ist, benutzen wir Proposition 1.9.(b) und nehmen zusätzlich an, dass L separabel über L_0 ist. Für jedes $l \in \{0,\dots,m\}$ erhalte die Abbildung

$$\varphi_l : K(x_1,\dots,x_k)[x_{k+1},\dots,x_{k+l}] \longrightarrow L, \quad x_i \longmapsto \alpha_i.$$

Wir behaupten, dass $\mathrm{im}(\varphi_l) = K(\alpha_1,\dots,\alpha_{k+l}) =: L_l$ und $\ker(\varphi_l) = (f_1,\dots,f_l)$ mit $f_i \in K[x_1,\dots,x_{k+i}] \cap P$. Zusätzlich gilt $\frac{\partial f_i}{\partial x_{k+i}} \notin P$, wenn L separabel über L_0 ist. Dies gilt für $l=0$. Mit Induktion nach l, nehmen wir nun $l>0$ an und dass $f_1,\dots,f_{l-1}$ schon gefunden ist. Da α_{k+l} algebraisch über L_{l-1} ist, folgt dass $L_l = L_0[\alpha_{k+1},\dots,\alpha_{k+l}]$ durch Induktion. Dies zeigt $\mathrm{im}(\varphi_l) = L_l$. Sei $g := \mathrm{irr}(\alpha_{k+l}, L_{l-1}) \in L_{l-1}[x_{k+l}]$. Da $L_{l-1} = L_0[\alpha_{k+1},\dots,\alpha_{k+l-1}]$, existiert $f_l \in K[x_1,\dots,x_{k+l}]$ und $h \in K[x_1,\dots,x_k] \setminus P$ so, dass $g = \frac{f_l(\alpha_1,\dots,\alpha_{k+l-1},x_{k+l})}{h(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}$. Es folgt, dass $f_l \in K[x_1,\dots,x_{k+l}] \cap P$. Weiterhin gilt, wenn L separabel über L_0 ist, dass L_l auch separabel über L_{l-1} ist und es folgt, dass g keine mehrfachen Wurzeln hat, also $\frac{\partial g}{\partial x_{k+l}}(\alpha_{k+l}) \neq 0$. Dies impliziert $\frac{\partial f_l}{\partial x_{k+l}} \notin P$. Also $f_l \in \ker(\varphi_l)$. Zum Beweis $\ker(\varphi_l) = (f_1,\dots,f_l)$, nehme $f \in \ker(\varphi_l)$. Dann teilt g $f(\alpha_1,\dots,\alpha_{k+l-1},x_{k+l})$, also existieren $r \in K[x_1,\dots,x_{k+l}]$ und $s \in K[x_1,\dots,x_k] \setminus P$ mit

$$\frac{f(\alpha_1,\dots,\alpha_{k+l-1},x_{k+l}) \cdot h(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}{f_l(\alpha_1,\dots,\alpha_{k+l-1},x_{k+l})} = \frac{r(\alpha_1,\dots,\alpha_{k+l-1},x_{k+l})}{s(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}.$$

Folglich liegen alle Koeffizienten von $hsf - rf_l$ (als Polynom in x_{k+l}) in $\ker(\varphi_{l-1})$. Also gilt nach Induktion $hsf - rf_l \in (f_1,\dots,f_l)_{K(x_1,\dots,x_k)[x_{k+1},\dots,x_{k+l}]}$. Da $h,s \neq 0$, impliziert dies $f \in (f_1,\dots,f_l)$ und die Behauptung ist bewiesen.
Für $l=m$ erhalten wir $\ker(\varphi_m) = (f_1,\dots,f_m)_{K(x_1,\dots,x_k)[x_{k+1},\dots,x_n]}$. Die algebraische Unabhängigkeit von $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ impliziert, dass $K(x_1,\dots,x_k)[x_{k+1},\dots,x_n] \subseteq K[x_1,\dots,x_n]_P$, also gilt $(\ker(\varphi_m))_{K[x_1,\dots,x_n]_P} = (f_1,\dots,f_m)_{K[x_1,\dots,x_n]_P}$. Wir erhalten

$$P_P \subseteq (\ker(\varphi_m))_{K[x_1,\dots,x_n]_P} = (f_1,\dots,f_m)_{K[x_1,\dots,x_n]_P} \subseteq P_P,$$

wodurch (a) bewiesen wird.
Für den Beweis von (b) betrachte die letzten m Spalten der Jacobi Matrix, welche die quadratische Matrix $A := (\partial f_i/\partial x_{k+j}) \in K[x_1,\dots,x_n]^{m\times m}$ bilden. Da $f_i \in K[x_1,\dots,x_{k+i}]$, ist A eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\partial f_i/\partial x_{k+i}$. Da diese Einträge nicht in P liegen unter der Annahme aus (b), folgt $\det(A) \notin P$, was (b) beweist. □

Lemma 1.13. Sei $I = (f_1, \dots, f_m) \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal in einem Polynomring über einem Körper und sei $P \subset K[x_1, \dots, x_n]$ ein Primideal, welches I enthält. Falls $L := K[x_1, \dots, x_n]_P / P_P$ (was ein Körperisomorphismus ist zu $\mathrm{Quot}(K[x_1, \dots, x_n]/P)$, dann gilt

(a)

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mod P\right) \leq \dim_L\left((I_P + P_P^2)/P_P^2\right).$$

(b) Wenn L eine separable Körpererweiterung von K ist, gilt Gleichheit in (a).

Beweis: Wir konstruieren uns lineare Abbildungen $\varphi : L^m \to P_P/P_P^2$ und $\psi : P_P/P_P^2 \to L^n$. Zunächst ist

$$\varphi : L^m \to P_P/P_P^2, \quad (g_1 + P_P, \dots, g_m + P_P) \longmapsto \sum_{j=1}^{m} g_j f_j + P_P^2$$

eine wohldefinierte, L-lineare Abbildung mit Bild $\mathrm{im}(\varphi) = (I_P + P_P^2)/P_P^2$. Um ψ zu definieren, wähle $f \in P_P^2$. Das heißt, dass $hf = \sum_{j=1}^{r} g_j h_j$ mit $h \in K[x_1, \dots, x_n] \setminus P$ und $g_j, h_j \in P$. Für $1 \leq i \leq n$ erhalten wir

$$h\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{r}\left(g_j\frac{\partial h_j}{\partial x_i} + h_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\right) \in P,$$

womit $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in P_P$. Deswegen ist die Abbildung

$$\psi : P_P/P_P^2 \to L^n, \quad f + P_P^2 \longmapsto (\frac{\partial f}{\partial x_1} + P_P, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} + P_P)$$

wohldefiniert und L-linear. Unter Berücksichtigung der Bilder von den Standardbasisvektoren von L^m unter der Komposition $\psi \circ \varphi : L^m \to L^n$, sehen wir, dass $\psi \circ \varphi$ durch die Jacobi-Matrix modulo P_P gegeben ist. Es folgt, dass

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mod P\right) = \dim_L(\mathrm{im}(\psi \circ \varphi)) \leq \dim_L(\mathrm{im}(\varphi)) = \dim_L((I_P + P_P^2)/P_P^2),$$

Gleichheit, wenn ψ injektiv ist. Dies zeigt Teil (a).
Für (b) genügt es zu zeigen, dass ψ injektiv ist unter der Annahme von (b). Unter dieser Annahme ist Lemma 1.12 (b) anwendbar. Wir bemerken, dass ψ unabhängig von $f_1, \dots, f_m$ ist. Also nehmen wir an, dass $f_1, \dots, f_m$ Polynome sind, gegeben durch Lemma 1.12, um die Injektivität zu zeigen. Dann erhalten wir durch Lemma 1.12 (a), dass $I_P = P_P$, also ist φ surjektiv. Weiterhin ist $\dim_L(\mathrm{im}(\psi \circ \varphi)) = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mod P\right) = m$ durch Lemma 1.12 (b), also ist $\psi \circ \varphi$ injektiv. Deswegen muss ψ injektiv sein und der Beweis ist fertig. □

Beweis: (Beweis des Jacobi Kriteriums)
Sei $Q_0 \in \mathrm{Spec}(K[x_1, \dots, x_n])$ ein Primideal mit $I \subseteq Q_0 \subseteq P$ und minimaler Höhe unter alle Primideale zwischen I und P. Nehme an, dass der Satz bewiesen ist für Q_0 anstatt Q. Denn

Teil (a) folgt für Q, da $\mathrm{ht}(Q_0) \leq \mathrm{ht}(Q)$. Weiterhin ist $(K[x_1,\ldots,x_n]/I)_{P/I}$ nicht regulär, wenn $Q_0 \neq Q$, nach Beispiel 1.7. Also sagt uns Teil (b), dass die Ungleichung in (a) strikt ist für Q_0 und deswegen auch für Q. Auch ist die Umkehrung von (b) trivialerweise richtig, da $(K[x_1,\ldots,x_n]/I)_{P/I}$ nicht regulär ist. Also nehmen wir an Q hat minimale Höhe unter den Primidealen zwischen I und P. Wir erhalten

$$\dim(K[x_1,\ldots,x_n]_P/I_P) = \mathrm{ht}(P) - \mathrm{ht}(Q).$$

Der Quotientenring $R := K[x_1,\ldots,x_n]_P/I_P$ ist ein noetherscher lokale Ring mit Maximalideal P_P/I_P und Restklassenkörper $L := K[x_1,\ldots,x_n]_P/P_P$. Da $R \cong (K[x_1,\ldots,x_n]/I)_{P/I}$, interessieren wir uns ob R regulär ist. Durch Anwendung des Lemmas 1.1 erhalten wir

$$\dim_L((P_P/I_P)/(P_P/I_P)^2) \geq \dim(R) = \mathrm{ht}(P) - \mathrm{ht}(Q),$$

Gleichheit genau dann, wenn R regulär ist. Wir haben L-lineare Isomorphismen

$$(P_P/I_P)/(P_P/I_P)^2 \cong P_P/(I_P + P_P^2) \cong (P_P/P_P^2)/((I_P + P_P^2)/P_P^2),$$

also

$$\dim_L(P_P/P_P^2) - \dim_L((I_P + P_P^2)/P_P^2) \geq \mathrm{ht}(P) - \mathrm{ht}(Q),$$

Gleichheit genau dann, wenn R regulär ist. Da nach Lemma 1.12 (a) $K[x_1,\ldots,x_n]_P$ regulär ist, ist $\dim_L(P_P/P_P^2)$ gleich mit $\mathrm{ht}(P)$, also insgesamt erhalten wir mit Lemma 1.13 (a)

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mod P\right) \leq \dim_L((I_P + P_P^2)/P_P^2) \leq \mathrm{ht}(Q),$$

und R ist regulär genau dann, wenn die zweite Ungleichung eine Gleichheit ist. Teil (a) und (b) folgen direkt aus diesem. Weiterhin zeigt Lemma 1.13 (b) unter der Annahme aus (c), dass die erste Ungleichung eine Gleichheit ist und somit (c) gilt. □