Seminar über Kommutative Algebra

Über die Faktoriellität von regulären lokalen Ringen

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik

Andreas Pangerl
Regensburg, 18.01.2017

Wir haben bereits im letzten Vortrag festgestellt, dass jede Lokalisierung eines regulären lokalen Ringes wieder regulär ist. Als nächstes gilt es zu zeigen, dass diese Ringe auch faktoriell sind. Dazu richten wir unser Augenmerk zuerst auf endlich erzeugte projektive Moduln und beweisen, dass sie über lokalen Ringen frei sind. Mit dieser wichtigen Einsicht werden wir anschließend eine Charakterisierung von projektiven Moduln angeben. Danach können wir nach einer kurzen Vorbereitung mit dem Beweis über die Faktoriellität von regulären lokalen Ringen beginnen.

Wir nehmen an, dass alle Ringe noethersch sind.

Proposition 1. *Ist R ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter projektiver R-Modul, so ist M frei.*

Proof. Zunächst ist $M \otimes_R R/\mathfrak{m} \cong M/\mathfrak{m}M$ ein endlich dimensionaler $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum und besitzt eine Basis der Form $x_1 \otimes 1, \ldots, x_n \otimes 1$ mit $x_1, \ldots, x_n \in M$. Wir betrachten als nächstes die R-lineare Abbildung $f : R^n \to M$ mit $e_i \mapsto x_i$. Tensorieren mit $R/\mathfrak{m}$ liefert einen Isomorphismus $f' : (R/\mathfrak{m})^n \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{m}M$. Wir erhalten also mit $C \coloneqq \mathrm{coker} f$, dass $\mathrm{coker} f' = C \otimes_R R/\mathfrak{m} \cong C/\mathfrak{m}C = 0$ ist. Mit Nakayama's Lemma ist $C = 0$, d.h. unsere Abbildung f ist surjektiv. Da M projektiv ist, besitzt f also einen Schnitt und es folgt $M \oplus \ker f \cong R^n$. Dadurch ist $\ker f$ endlich erzeugt und mit $\ker f' = \ker f \otimes R/\mathfrak{m} = 0$ liefert Nakayama's Lemma $\ker f = 0$. Also ist f ein Isomorphismus und M ist ein freier R-Modul vom Rang $\dim_{R/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}M$.

□

Irving Kaplansky konnte 1958 sogar zeigen, dass Proposition 1 auch für nicht endlich erzeugte Moduln gilt. Als nächstes können wir eine Charakterisierung von endlich erzeugten projektiven Moduln beweisen.

Theorem 2. *Sei M ein endlich erzeugter Modul über einem noetherschen Ring R. Dann sind äquivalent:*

(i) M ist projektiv

(ii) $M_\mathfrak{m}$ ist ein freier $R_\mathfrak{m}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ in R.

Proof. $(i) \implies (ii)$: Da M ein direkter Summand eines freien R-Moduls ist, gibt es einen R-Modul Q mit $M \oplus Q \cong R^n$. Weiter liefert die Lokalisierung an einem maximalen Ideal $M_\mathfrak{m} \oplus Q_\mathfrak{m} \cong R_\mathfrak{m}^n$. Also ist $M_\mathfrak{m}$ ein endlich erzeugter projektiver Modul über einem lokalen Ring und folglich mit Proposition 1 frei.

$(ii) \implies (i)$: Wir müssen zeigen, dass der kovariante Hom-Funktor von M exakt ist. Sei also $N_1 \to N_2 \to 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln und sei C der Cokern von

$$\mathrm{Hom}_R(M, N_1) \to \mathrm{Hom}_R(M, N_2).$$

Es gilt zu zeigen, dass diese Abbildung surjektiv, also $C = 0$ ist. Aber für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ in R ist mit [1, Proposition 2.10]

$$C_{\mathfrak{m}} = \operatorname{coker}(\ \operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, (N_1)_{\mathfrak{m}}) \to \operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, (N_2)_{\mathfrak{m}})\ ).$$

Folglich erhalten wir $C_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$, also ist auch $C = 0$.

□

Nun kommen wir zu additiv-freien (Eng.: *stably free*) Moduln, die eine wichtige Rolle im Beweis der Faktoriellität spielen werden.

Proposition 3. *Jeder projektive Modul mit einer endlichen freien Auflösung ist additiv-frei, d.h. es gibt einen freien Modul Q, sodass $P \oplus Q$ frei ist.*

Proof. Sei

$$\mathfrak{F} : 0 \to F_n \xrightarrow{\varphi_n} F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \xrightarrow{\varphi} P \to 0$$

eine endliche freie Auflösung eines projektiven Moduls P. Dann besitzt der Epimorphismus $F_0 \to P$ einen Schnitt und wir erhalten $\ker \varphi \oplus P \cong F_0$. Also ist auch $\ker \varphi = \operatorname{im} \varphi_1$ projektiv und setzen wir dies fort, folgt $F_i \cong \operatorname{im} \varphi_{i+1} \oplus \operatorname{im} \varphi_i$. Insgesamt ist also

$$P \oplus F_1 \oplus F_3 \oplus \cdots \cong F_0 \oplus F_2 \oplus \cdots .$$

□

Das nächste Lemma zeigt uns, dass additiv-freie Ideale immer frei sind.

Lemma 4. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul mit $M \oplus R^{n-1} \cong R^n$, dann ist $M \cong R$.*

Proof. Wir haben die folgenden Isomorphismen

$$\begin{aligned} R &\cong \wedge^n R^n \\ &\cong \wedge^n (M \oplus R^{n-1}) \\ &\cong \bigoplus_{i+j=n} \wedge^i M \otimes \wedge^j R^{n-1} \\ &\cong M \oplus \wedge^2 M \otimes \wedge^{n-2} R^{n-1} \oplus \cdots . \end{aligned}$$

Ist nun $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in R, so ist mit Theorem 2 $M_{\mathfrak{m}}$ ein freier $R_{\mathfrak{m}}$-Modul von Rang 1, d.h. $\wedge^i M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle $i \geq 2$. Es folgt also $\wedge^i M = 0$ für alle $i \geq 2$ und wir sind fertig.

□

Lemma 5. *Sei R ein Integritätsring, $x \in R$ ein Primelement und Q ein Primideal mit $x \notin Q$. Wird Q in $R[x^{-1}]$ ein Hauptideal, dann ist auch Q ein Hauptideal. Ist also $R[x^{-1}]$ faktoriell, so auch R.*

Proof. Wähle ein Element $q \in Q$, sodass $qR[x^{-1}] = QR[x^{-1}]$ und das Ideal $(q) \subset R$ maximal mit dieser Eigenschaft ist. Wir können also $q \notin (x)$ annehmen. Es genügt nun zu zeigen: Ist $xy \in (q)$, so ist $y \in (q)$.

Sei also $xy = rq$. Da (x) ein Primideal ist und $q \notin (x)$ muss $r = sx$ für ein $s \in R$ gelten. Teilen beider Seiten durch x ergibt $y = sq$, wie gewünscht.

Für die letzte Behauptung benötigen wir folgende Aussage der Kommutativen Algebra: Ist jedes Primideal der Höhe 1 ein Hauptideal, so ist R faktoriell. Die Primideale der Höhe 1 in R sind neben (x) nur Primideale, die x nicht enthalten. Diese sind aber Hauptideale in $R[x^{-1}]$ und so auch in R. $\square$

Lemma 6. *Sei R ein regulärer lokaler Ring der Dimension d und x Teil eines minimalen Erzeugendensystems von $\mathfrak{m}$. Dann ist $R/(x)$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d-1$.*

Proof. Seien $x_1, \ldots, x_{d-1} \in \mathfrak{m}$, sodass $(x, x_1, \ldots, x_{d-1})$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$ ist. Es folgt $\overline{\mathfrak{m}} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{d-1}})$, also gilt $\dim \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2 \leq d-1$. Wir erhalten

$$d - 1 = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) - 1 \leq \mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{m}}) = \dim\, R/(x) \leq \dim\, \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2 \leq d - 1.$$

Somit ist $R/(x)$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension $d-1$. $\square$

Wir kommen schließlich zu

Theorem 7. *Jeder reguläre lokale Ring ist faktoriell.*

Proof. Sei R ein regulärer lokaler Ring und x ein Element eines minimalen Erzeugendensystems vom maximalen Ideal in R. Mit Lemma 6 ist $R/(x)$ wieder ein regulärer lokaler Ring und somit integer, also muss x ein Primelement sein.

Wir führen den Beweis nun mittels Induktion über die Dimension d von R. Ist $d = 0$, so ist R ein Körper und damit faktoriell. Sei also $d > 0$. Mit Lemma 5 genügt es zu zeigen, dass $R[x^{-1}]$ faktoriell, also jedes Primideal Q in $R[x^{-1}]$ der Höhe 1 ein Hauptideal ist. Dazu sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $R[x^{-1}]$ und $\mathfrak{p} := R \cap \mathfrak{m}$ das entsprechende Primideal in R. Dann ist $R[x^{-1}]_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{p}}$ eine Lokalisierung von R und daher ein regulärer lokaler Ring. Da $\mathfrak{p}$ nicht maximal ist, folgt $\dim R_{\mathfrak{p}} < \dim R$ und nach Induktion ist $R[x^{-1}]_{\mathfrak{m}}$ faktoriell.

Folglich ist $Q_{\mathfrak{m}}$ ein Hauptideal und somit ein freier $R[x^{-1}]_{\mathfrak{m}}$-Modul von Rang 1 für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$. Nach Theorem 2 ist Q also ein projektiver $R[x^{-1}]$-Modul. Weiter ist Q eine Lokalisierung eines Ideals Q' in R, welches eine endliche freie Auflösung besitzt. Durch Lokalisieren dieser Auflösung erhalten wir eine endliche freie Auflösung von Q. Dadurch ist Q mit Proposition 3 additiv-frei und mit Lemma 4 folgt, dass Q sogar ein freier $R[x^{-1}]$-Modul von Rang 1, also ein Hauptideal ist. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] David Eisenbud. *Commutative Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.