Seminarvortrag

SEMINAR ÜBER KOMMUTATIVE ALGEBRA:
Gröbnerbasen und Regularität

Länge von Moduln, lokale Ringe und korrespondierende graduierte Ringe

Vorträgerin: Christina Bachfisch

Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik

Vortrag: 23.11.2016

1 Länge von Moduln

Definition 1.1. Sei M ein Modul über einem Ring R. Dann ist die *Länge* von M $\mathrm{l}_R(M)$ als das supremum der Kettenlängen von absteigenden Untermoduln $M_i \subseteq M$ definiert.

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$$

Beispiel 1.2. 1. Die Länge eines Moduls hängt von dem Grundring ab über den er betrachtet wird. Betrachte hierfür $\mathbb{Q}$ als Modul über sich selbst. Dann hat er Länge 1, da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist und somit keine anderen Ideale außer $(0), (1)$ besitzt. Betrachtet man $\mathbb{Q}$ als Modul über $\mathbb{Z}$ so hat er unendliche Länge, da dies zu den Untergruppen von $\mathbb{Q}$ bzgl. "+" korrespondiert, da die Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{Z}$ einer Addition entspricht.

2. $\mathbb{Z}$ hat als Modul über sich selbst unendliche Länge. Betrachte folgende Kette

$$0 \subsetneq 2^n\mathbb{Z} \subsetneq 2^{n-1}\mathbb{Z} \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{Z}.$$

Notation 1.3. *Eine Kompositionsreihe von M ist eine maximale Kette von R-Untermoduln von M.*

Propostition 1.4. *Für eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \xrightarrow{\iota} M' \to M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ gilt*

$$\mathrm{l}_R(M) = \mathrm{l}_R(M') + \mathrm{l}_R(M'').$$

Beweis. Sei $\mathrm{l}_R(M') = n$ mit Kompositionsreihe $M_0' \subsetneq \ldots \subsetneq M_n' = M'$ und $\mathrm{l}_R(M'') = m$ mit Kompositionsreihe $M_0'' \subsetneq \ldots \subsetneq M_n'' = M''$. Betrachte folgende Kette

$$\iota(M_0') \subsetneq \ldots \subsetneq \iota(M_n') = \ker(\pi) \subsetneq \pi^{-1}(M_0'') \subsetneq \ldots \subsetneq \pi^{-1}(M_m'').$$

Da ι injektiv ist, gilt im ersten Teil der Kette keine Gleichheit. Im zweiten Teil ist dies klar. Somit ist $\mathrm{l}_R(M) \geq m + n$.
Bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{l}_R(M) \leq m+n$. Betrachte mit Widerspruchsannahme eine beliebige Kette von Untermoduln von M der Länge $n + m + 1$: $M_0 \subseteq \ldots \subseteq M_n = M$. Dann ist $\iota^{-1}(M_i)$ ein Untermodul in M' und $\pi(M_i)$ ein Untermodul in M''. Also erhält man, dass $\iota^{-1}(M_i) = \iota^{-1}(M_j)$ für $m+1$ viele $i \neq j$ und analog ist $\pi(M_i) = \pi(M_j)$ für $n+1$ viele $i \neq j$. Also erhält man ein M_k mit $1 \leq k \leq n+m+1$ sodass $\pi(M_k) = \pi(M_{k+1})$ für ein und gleichzeitig $\iota^{-1}(M_k) = \iota^{-1}(M_{k+1})$. Dann folgt mit folgendem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \iota^{-1}(M_k) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & M_k \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, hook] & \pi(M_k) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \iota^{-1}(M_{k+1}) \arrow[r, "\iota"] & M_{k+1} \arrow[r, "\pi"] & \pi(M_{k+1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Da dieses Diagramm offensichtlich kommutiert erhält man mit dem Fünferlemma auch eine Gleichheit von $M_k = M_{k+1}$ und somit ist $\mathrm{l}_R(M) = m + n$. $\square$

Beispiel 1.5. 1. Für einen Untermodul $N \subseteq M$ gilt

$$\mathrm{l}_R(M) = \mathrm{l}_R(N) + \mathrm{l}_R(M/N).$$

Denn offensichtlich ist $0 \to N \hookrightarrow M \to M/N \to 0$ exakt und dann folgt es mit 1.4 sofort.

2. Man kann 1.4 auch auf die direkte Summe zweier Moduln $M \oplus N$ anwenden und erhält somit, dass $\mathrm{l}_R(M \oplus N) = \mathrm{l}_R(M) + \mathrm{l}_R(N)$ gilt.

Satz 1.6. *(Basisaussagen über die Länge) Sei M ein R-Modul.*

1. *Wenn M eine endliche Kompositinsreihe der Länge n besitzt, dann besitzen bereits alle Kompositionsreihen von M die Länge n.*

2. *Es hat M genau dann endliche Länge, wenn er artinsch und noethersch ist.*

3. *Wenn M noethersch ist, dann ist jeder sukzessive Quotient in einer Kompositionsreihe isomorph zu $R/\mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$*

Beweis. 1. Setze $n = \mathrm{l}_R(M)$ und sei $M_0 \subsetneq \ldots \subsetneq M_k = M$ eine maximale Kette von M. Wir wollen nun zu erst zeigen, dass M_i/M_{i-1} ein einfacher Modul ist. Also nur sich selbst und $\{0\}$ als Untermodul besitzt. Dies folgt sofort, da wenn $\{0\} \neq N \subsetneq M_i/M_{i-1}$ ein Untermodul ist, dann liftet dieser zu einem Modul mit $M_{i-1} \subsetneq N \subsetneq M_i$ und somit wäre die anfängliche Kette nicht mehr maximal.

Somit erhlaten wir, dass

$$1 = \mathrm{l}_R(M_i/M_{i-1}) \overset{1.4}{=} \mathrm{l}_R(M_i) - \mathrm{l}_R(M_{i-1})$$

Also erhält man induktiv

$$n = \mathrm{l}_R(M_k) = \mathrm{l}_R(M_{k-1}) + 1 = \ldots = \mathrm{l}_R(M_0) + k = 0 + k.$$

2. Nach Definition ist es klar, dass ein Modul mit endlicher Länge artinsch und noethersch ist.
Sei nun M artinsch und nicht der Nullmodul. Wähle nun sukzessive einen maximalen Untermodul von M. Diese Kette wird stationär, da M artinsch ist.

3. Betrachte nun ein $a \in M_i/M_{i-1}$ das ungleich $\{0\}$ ist. Dann ist nach vorheriger Aussage $\langle a \rangle = M_i/M_{i-1}$ und man erhält durch Multiplikation mit a einen Isomorphismus $R/\mathrm{Ann}(a) \xrightarrow{\sim} M_i/M_{i-1}$. Da M_i/M_{i-1} nach Voraussetzung nicht $\{0\}$ ist und somit auch $R/\mathrm{Ann}(a)$ nicht null ist existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_i \subseteq R/\mathrm{Ann}(a)$. Dann ist $\mathfrak{m}_i/\mathrm{Ann}(a) \subseteq R/\mathrm{Ann}(a)$ und somit endweder $\mathfrak{m}_i/\mathrm{Ann}(a) = R/\mathrm{Ann}(a)$, was dem widerspricht, dass $\mathfrak{m}_i \subseteq R$ maximal ist also gilt $\mathfrak{m}_i/\mathrm{Ann}(a) = \{0\}$. Dann erhalten wir also, dass $\mathfrak{m}_i = \mathrm{Ann}(a)$ und damit $R/\mathfrak{m}_i \cong M_i/M_{i-1}$.

□

Bemerkung 1.7. *In einem noetherschen lokalen Ring R mit maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ist für $\sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$ die $\dim(R/\mathfrak{p}) = 0$. Somit $R/\mathfrak{p}$ artinsch und noethersch und somit ist $\mathrm{l}_R(R/\mathfrak{p}) < \infty$*

Propostition 1.8. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann ist die $\dim(R)$ gleich die minimale Anzahl der $a_i \in \mathfrak{m}$ sodass*

$$\mathfrak{m} = \sqrt{(a_1, \ldots, a_m)}.$$

Beweis. [Kem09, Corollary 7.9] □

Lemma 1.9. *Sei R ein noetherscher und lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Dann existiert ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ von Grad $n = \dim(R)$, sodass*

$$\mathrm{l}_R(R/\mathfrak{m}^d) \leq p(d) \quad \forall d \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Nutze nun die Darstellung aus 1.8 und setze $\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_n)$. Dann ist $\mathfrak{p}^d \subseteq \mathfrak{m}^d$ für alle $d \in \mathbb{N}_0$. Dies liefert einen Epimorphismus $R/\mathfrak{p}^d \to R/\mathfrak{m}^d$ und mit 1.4 erhält man (mit Erweiterung des Diagramms nach links durch den Kern des Epimorphismus)

$$\mathrm{l}_R(R/\mathfrak{m}^d) \leq \mathrm{l}_R(R/\mathfrak{p}^d) \quad . \tag{1}$$

Betrachte nun folgende Kette

$$\{0\} = \mathfrak{p}^d/\mathfrak{p}^d \subseteq \mathfrak{p}^{d-1}/\mathfrak{p}^d \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^d \subseteq R/\mathfrak{p}^d$$

Für jedes i ist $\mathfrak{p}^i$ von Monomen von Grad i in $a_1, \ldots, a_n$ erzeugt. Die Anzahl dieser Monome ist nach [Kem09, remark 11.5] $k_i := \binom{i+n}{n} - \binom{i-1+n}{n}$. Also kann $\mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1}$ von k_i Elementen als R-Modul erzeugt werden und man erhält einen Epimorphismus $(R/\mathfrak{p})^{k_i} \to \mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1}$. Dies liefert

$$\begin{aligned} \mathrm{l}_R(R/\mathfrak{m}^d) \leq \mathrm{l}_R(R/\mathfrak{p}^d) &= \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{l}_R(\mathfrak{p}^i/\mathfrak{p}^{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{d-1} \mathrm{l}_R((R/\mathfrak{p})^{k_i}) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} k_i \mathrm{l}_R(R/\mathfrak{p}) = \binom{d-1+n}{n} \mathrm{l}_R(R/\mathfrak{p}) < \infty \end{aligned}$$

□

2 Der assoziierte graduierte Ring

Es sei nun immer R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $K := R/\mathfrak{m}$.

Definition 2.1. Betrachte die R-Unteralgebra von $R[t]$

$$R^* := R[\mathfrak{m} \cdot t].$$

Bemerkung 2.2. *1. $R[t]$ ist ein graduierte R-Algebra mit der Graduierung*

$$R[t]_d := Rt^d.$$

2. R^* wird mit der Graduierung $R^*_d := Rt^d \cap R^* = \mathfrak{m}^d t^d \cong \mathfrak{m}^d$ zu einer graduierten R-Algebra.

Definition 2.3. Es sei der *assoziierte graduierte Ring* von R als

$$\mathrm{gr}(R) := R^*/(\mathfrak{m})_{R^*}$$

definiert.

Bemerkung 2.4. *Durch die Graduierung von R^* ist auch $\mathrm{gr}(R)$ folgendermaßen graduiert:*

$$\mathrm{gr}(R)_d = R^*_d/(R^*_d \cdot \mathfrak{m}) \cong \mathfrak{m}^d/\mathfrak{m}^{d+1}. \tag{2}$$

Wobei $\mathrm{gr}(R)_0 = \cong K$ gilt.
Das Produkt der Residuenklassen für $a \in \mathfrak{m}^i$ und $b \in \mathfrak{m}^j$ ist durch

$$(a + \mathfrak{m}^{i+1})(b + \mathfrak{m}^{j+1}) = ab + \mathfrak{m}^{i+j+1} \in \mathfrak{m}^{i+j}/\mathfrak{m}^{i+j+1} \tag{3}$$

gegeben.

Propostition 2.5. *1. Es ist $\mathrm{gr}(R)$ noethersch.*

2. Für ein $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ist $K[x_1, \dots, x_n]/I \cong \mathrm{gr}(R)$

Beweis. 1. Da R noethersch ist, ist $\mathfrak{m} = (c_1, \dots, c_n)$ endlich erzeugt in R. Damit ist auch $R^* = R[c_1 t, \dots, c_n t]$ noethersch und somit auch $\mathrm{gr}(R)$.

2. Es ist $\mathrm{gr}(R)$ erzeugt von $a_i := c_i t + (\mathfrak{m})_{R^*}$. Betrachte nun den Epimorphismus

$$K[x_1, \dots, x_n] \to \mathrm{gr}(R), \quad x_i \mapsto a_i.$$

Wähle nun $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ als Kern von diesem Epimorphismus.

□

Bemerkung 2.6. *Damit erhält man*

$$\{f + I | f \in K[x_1, \dots, x_n], \deg(f) \leq d\} =: A_{\leq d} \cong \bigoplus_{i=0}^{d} \mathrm{gr}(R)_i.$$

Somit bekommt man

$$\begin{aligned} \mathrm{l}_R(R/\mathfrak{m}^{d+1}) &= \sum_{i=0}^{d} \mathrm{l}_R(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) = \sum_{i=0}^{d} \dim_K(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) \\ &= \dim_K(A_{\leq d}) =: h_I(d) \end{aligned} \tag{4}$$

Da dieses Polynom h_I in unserem Falle nur von R abhängt wird es nun h_R geschrieben und heißt Hilbert-Samuel Funktion *von R.*

Propostition 2.7. *(Das Hilber-Samuel Polynom von R). Es existiert ein Polynom $p_R \in \mathbb{Q}[x]$, sodass*

$$\mathrm{l}_R(R/\mathfrak{m}^{d+1}) = p_R(d)$$

für groß genuge d und $\deg(p_R) = \dim(\operatorname{gr}(R))$. *Dieses p_R heißt* Hilbert-Samuel Polynom

Bemerkung 2.8. *Mit 4 erhält man, dass $p_R = h_R$.*

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\dim(\operatorname{gr}(R)) = \dim(R).$$

Dafür benötigen wir folgende Aussagen.

Lemma 2.9. *(Artin-Rees Lemma) Sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann existiert eine nicht-negative ganze Zahl r, sodass*

$$I \cap \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n-r} \cdot (I \cap \mathfrak{m}^r)$$

für alle $n \geq r$ gilt.

Beweis. Definiere $J_d \coloneqq \sum_{i=0}^{d} R^*(I \cap \mathfrak{m}^i)t^i$. Dies ist das Ideal in R^*, das von $(I \cap \mathfrak{m}^i)t^i$ erzeugt wird mit $i \leq d$. Da nach 2.5 R^* noethersch ist, existiert also ein $n \geq r \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, sodass $J_n = J_d$. Nehme an, dass $(I \cap \mathfrak{m}^n)t^n$ in einem homogenen Teil R_n^* von R^*. Somit gilt also, dass

$$\begin{aligned}(I \cap \mathfrak{m}^n)t^n \subseteq R_n^* \cap J_n = R_n^* \cap \sum_{i=0}^{r} R^*(I \cap \mathfrak{m}^i)t^i = \sum_{I=0}^{r} R_{n-i}^*(I \cap \mathfrak{m}^i)t^i \\ = \sum_{i=0}^{r} \mathfrak{m}^{n-i}(I \cap \mathfrak{m}^i)t^n = \sum_{i=0}^{r} \mathfrak{m}^{n-r}\mathfrak{m}^{r-i}(I \cap \mathfrak{m}^i)t^n \subseteq \mathfrak{m}^{n-r}(I \cap \mathfrak{m}^r)t^n\end{aligned}$$

Damit ist $I \cap \mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{m}^{r-i}(I \cap \mathfrak{m}^r)$. Offensichtlich gilt aber auch, dass $\mathfrak{m}^{r-i}(I \cap \mathfrak{m}^r) \subseteq I \cap \mathfrak{m}^n$, da $\mathfrak{m}^{n-r} \subseteq R$. Somit gilt Gleichheit. □

Lemma 2.10. *Wenn $a \in \mathfrak{m}$ kein Nullteiler ist, dann gilt*

$$\dim(\operatorname{gr}(R/aR)) < \dim(\operatorname{gr}(R)).$$

Beweis. Nach 2.7 ist es äquivalent zu zeigen, dass $\deg(p_{R/Ra}) < \deg(p_R)$ ist. Vergleiche hierfür die Hilbert-Samuel Funktionen $h_{R/Ra}$ und h_R. Da $\mathfrak{m}/Ra$ in R/Ra ein maximales Ideal ist, ist

$$h_{R/Ra}(d) = \mathrm{l}_{R/Ra}(M_d)$$
$$\text{mit} \quad M_d \coloneqq (R/Ra)/(\mathfrak{m}/Ra)^{d+1}.$$

Der Epimorphismus $R \to M_d$ hat als Kern $Ra + \mathfrak{m}^{d+1}$ und somit kann man den Epimorphismus $R/\mathfrak{m}^{d+1} \to M_d$ mit dem Kern $(Ra + \mathfrak{m}^{d+1}/\mathfrak{m}^{d+1} \cong Ra/(Ra \cap \mathfrak{m}^{d+1})$ betrachten. Also erhält man mit 1.4 und der offensichtlichen exakten Sequenz
$0 \to Ra/(Ra \cap \mathfrak{m}^{d+1}) \hookrightarrow R/\mathfrak{m}^{d+1} \twoheadrightarrow M_d \to 0$:

$$\mathrm{l}_{R/Ra}(M_d) = \mathrm{l}_{R/Ra}(R/\mathfrak{m}^{d+1}) - \mathrm{l}_{R/Ra}(Ra/(Ra \cap \mathfrak{m}^{d+1}. \tag{5}$$

Mit dem Artin-Rees Lemma 2.9 auf $I = Ra$ angewandt erhält man ein r, sodass für $d+1 \geq r$ gilt dass $Ra \cap \mathfrak{m}^{d+1} = \mathfrak{m}^{d+1-r}(Ra \cap \mathfrak{m}^r) \subseteq \mathfrak{m}^{d+1-r}a$. Also erhält man für groß genuge d

$$Ra/(Ra \cap \mathfrak{m}^{d+1}) \twoheadrightarrow Ra/\mathfrak{m}^{d+1-r}a \cong R/\mathfrak{m}^{d+1-r}.$$

Mit 1.4 folgt somit für groß genuge d, dass $\mathrm{l}_{R/Ra}(R/\mathfrak{m}^{d+1-r}) \leq \mathrm{l}_{R/Ra}(Ra/(Ra \cap \mathfrak{m}^{d+1}$. Damit folgt mit 5, dass

$$\begin{aligned} h_{R/Ra}(d) &= \mathrm{l}_{R/Ra}(M_d) \leq \mathrm{l}_{R/Ra}(R/\mathfrak{m}^{d+1}) - \mathrm{l}_{R/Ra}(R/\mathfrak{m}^{d+1-r}) \\ &= h_R(d) - h_R(d-1) \end{aligned}$$

für groß genuge d gilt. Da $\mathfrak{m}^{d+1-r} \neq R$ ist $h_R(d-1) \neq 0$ und da $R/\mathfrak{m}^{d+1}$ als Ring artinsch ist und somit $\mathrm{l}_{R/Ra}(R/\mathfrak{m}^{d+1-r}) < \infty$ und somit folgt, dass $\deg(p_{R/Ra}) < \deg(p_R)$ ist. □

Satz 2.11. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring und* $\mathrm{gr}(R)$ *sein assoziierter graduierter Ring, dann ist*

$$\dim(R) = \dim(\mathrm{gr}(R))$$

Beweis. Aus 2.7 und 1.9 folgt sofort, dass $\dim(\mathrm{gr}(R)) \leq \dim(R)$. Für "$\geq$"nutze Induktion über $\dim(\mathrm{gr}(R))$. Betrachte für beliebige $P \in \mathrm{Spec}(R)$ und beliebige $d \geq 0$ den Epimorphismus $R/\mathfrak{m}^{d+1} \twoheadrightarrow (R/P)/(\mathfrak{m}/P)^{d+1}$. Mit 1.4 erhalte somit, dass $h_{R/P}(d) \leq h_R(d)$ gilt und daraus folgt mit 2.7, dass $\dim(\mathrm{gr}(R/P)) \leq \dim(\mathrm{gr}(R))$ ist. Also reicht es zu zeigen, dass $\dim(R/P) \leq \dim(\mathrm{gr}(R/P))$ für alle $P \in \mathrm{Spec}(R)$ gilt und wir können annehmen, dass R integer ist.
Beginne nun die Induktion für $\dim(\mathrm{gr}(R)) = 0$. Da $\mathrm{gr}(R)$ eine affine $R/\mathfrak{m}$-Algebra ist, ist die $\dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathrm{gr}(R)) < \infty$. Also sind nur endlich viele homogene Komponenten von $\mathrm{gr}(R)$ ungleich null und somit ist $\mathfrak{m}^d = \mathfrak{m}^{d+1}$ für bestimmte $d \geq 0$. Dies impliziert mit Nakayama Lemma, dass $\mathfrak{m}^d = 0$ und somit $\mathfrak{m} = 0$ also R ein Körper und $\dim(R) = 0$.
Nehme nun an, dass $\dim(\mathrm{gr}(R)) \geq 0$ ist. Also haben wir eine Kette von Primidealen in R: $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_k$ mit $k > 0$. Da nach Annahme R integer ist, folgt, dass $P_0 = (0)$. Wähle nun ein $a \in P_1 \setminus \{0\}$, dann gilt nach 2.10, da R integer ist, dass $\dim(\mathrm{gr}(R/Ra)) < \dim(\mathrm{gr}(R))$ ist. Da wenn $\dim(R) \neq 0$ ist gilt, dass $\dim(R/Ra) + 1 = \dim(R)$, gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass $\dim(R/Ra) = \dim(\mathrm{gr}(R/Ra))$. Somit ist

$$\dim(R) = \dim(R/Ra) + 1 = \dim(\mathrm{gr}(R/Ra)) + 1 \leq \dim(\mathrm{gr}(R))$$

da die Dimension von Ringen ein Element in $\mathbb{N} \cup \infty$ ist. □

Satz 2.12. *(Durchschnittssatz von Krull) Wenn R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ ist, dann gilt*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n = \{0\}.$$

Beweis. Setze $I := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^n$, dann existiert nach dem Artin-Rees Lemma 2.9 ein $r \in \mathbb{N}$, sodass $I \cap \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n-1}(I \cap \mathfrak{m}^r)$ für alle $n \geq r$ gilt. Setze nun $n = r+1$ und erhalte $I = \mathfrak{m}I$. Dann folgt mit Nakayama Lemma, dass $I = (0)$. □

Korollar 2.13. *Wenn R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ ist, dann gibt es für jedes $a \in R \setminus \{0\}$ ein $d \in \mathbb{N}$ sodass $a \in \mathfrak{m}^d$ und $a \notin \mathfrak{m}^{d+1}$.*

Beweis. Wenn $a \in \mathfrak{m}^d$ für alle $d \in \mathbb{N}$, dann ist $a \in \bigcap_{d \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^d = 0$. Und da $\mathfrak{m}^0 = R$ ist jedes $a \in R$ in $\mathfrak{m}^0$. □

Definition 2.14. Dieses d aus 2.13 wird die Ordnung von a genannt.

Bemerkung 2.15. *Betrachte die Graduierung von $\mathrm{gr}(R)$ aus 2 und definiere $\mathrm{gr}(a) := a + \mathfrak{m}^{d+1} \in \mathrm{gr}(R)_d \setminus \{0\}$, wobei $d = \mathrm{ord}(a)$ ist. Setze $\mathrm{gr}(0) = 0$ und betrachte die Abbildung $R \to \mathrm{gr}(R)$. Es gilt $\mathrm{gr}(a)\mathrm{gr}(b) = ab + \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(a)+\mathrm{ord}(b)+1} = 0 \Leftrightarrow ab \in \mathfrak{m}^{\mathrm{ord}(a)+\mathrm{ord}(b)+1}$. Wenn $\mathrm{gr}(a)\mathrm{gr}(b) \neq 0$, dann gilt offensichtlich, dass*

$$\mathrm{gr}(a)\mathrm{gr}(b) = \mathrm{gr}(ab) \tag{6}$$

Definition 2.16. Ein Element $s \in \mathrm{Quot}(R)$ heißt *fast ganz* über R, wenn ein $c \in R \setminus \{0\}$ existiert, sodass $cs^n \in R$ für alle $n \in N$ ist.

Lemma 2.17. *Wenn R ein Integritätsring ist und $s \in \mathrm{Quot}(R)$ ganz über R, dann ist s fast ganz über R. Wenn R zusätzlich noethersch ist, dann gilt auch die Umkehrung.*

Beweis. [Kem09, Lemma 8.11] □

Satz 2.18. *Sei R ein noetherscher lokaler Ring und sei $\mathrm{gr}(R)$ sein assoziierter graduierter Ring, dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Wenn $\mathrm{gr}(R)$ integer ist, dann ist auch R integer.*
2. *Wenn $\mathrm{gr}(R)$ normal ist, dann ist auch R normal.*

Beweis.

1. R ist nicht der Nullring, da er lokal ist. Seien $a, b \in R \setminus \{0\}$ und nach Voraussetzung ist $\mathrm{gr}(a)\mathrm{gr}(b) \neq 0$ und somit $\mathrm{gr}(a)\mathrm{gr}(b) = \mathrm{gr}(ab)$. Somit ist $ab \neq 0$, da sonst $\mathrm{gr}(ab) = 0$ wäre.

2. Nach (i) ist R integer. Bleibt zu zeigen, dass für $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ mit $\frac{a}{b} \in \mathrm{Quot}(R)$ ganz über R gilt, dass bereits $\frac{a}{b} \in R$. Das heißt, dass $a \in (b)$ dem von b erzeugten Ideal in R ist. Zeige zu erst, dass

$$a \in \mathfrak{m}^n + (b)_R \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

mit Induktion über n. Für $n = 0$ ist es klar. Nehme nun an, dass $n > 0$ ist. Dann existiert ein $\tilde{a} \in \mathfrak{m}^{n-1}$ und ein $r \in R$, sodass

$$a = \tilde{a} + rb. \tag{8}$$

Angenommen $\mathrm{ord}(\tilde{a}) = n - 1$ und da $\frac{a}{b}$ und r ganz über R sind ist auch $\frac{\tilde{a}}{b} = \frac{a}{b} + r$ ganz über R. Damit ist es mit 2.17 fast ganz über R. Also existiert ein $c \in R \setminus \{0\}$ sodass $c\left(\frac{\tilde{a}}{b}\right)^n \in R$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Das heißt, dass $c\tilde{a}^n \in (b^n)_R$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\mathrm{gr}(R)$ nach Voraussetzung integer ist, gilt, dass $\mathrm{gr}(c)\mathrm{gr}(\tilde{a}) = \mathrm{gr}(c\tilde{a}) \in \mathrm{gr}((b)^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt gerade, dass $\frac{\mathrm{gr}(\tilde{a})}{\mathrm{gr}(b)} \in \mathrm{Quot}(\mathrm{gr}(R))$ fast ganz ist. Und da $\mathrm{gr}(R)$ noethersch ist, ist nach 2.17 $\frac{\mathrm{gr}(\tilde{a})}{\mathrm{gr}(b)}$ ganz über $\mathrm{gr}(R)$ und somit nach Voraussetzung bereits in $\mathrm{gr}(R)$. Da $\mathrm{gr}(\tilde{a}) \in \mathrm{gr}(R)_{n-1}$ und $\mathrm{gr}(b) \in \mathrm{gr}(R)_{\mathrm{ord}(b)}$ homogen sind ist $\frac{\tilde{a}}{b} = \mathrm{gr}(s)$ mit $\mathrm{ord}(s) = n - 1 - \mathrm{ord}(b)$. Nutze nun 6 und erhalte

$$0 = \mathrm{gr}(\tilde{a}) - \mathrm{gr}(s)\mathrm{gr}(b) = \mathrm{gr}(\tilde{a}) - \mathrm{gr}(sb) = \tilde{a} - sb + \mathfrak{m}^n.$$

Somit ist $\tilde{a} = (\tilde{a} - sb) + sb \in \mathfrak{m}^n + (b)_R$. Nach 8 ist $a \in \mathfrak{m} + (b)_R$ und somit gilt 7.
O.E. ist $b \notin R^*$ und somit $b \in \mathfrak{m}$. Dann setze $\bar{R} := R/(b)_R$ ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\bar{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/(b)_R$. Betrachte den kanonischen Morphismus $R \to \bar{R}$. Dann ist $\bar{a} \in \bar{\mathfrak{m}}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach 7 und somit folgt mit dem Durchschnittssatz von Krull 2.12, dass $\bar{a} = 0$ und somit $a \in (b)_R$.

□

Literatur

[Kem09] Gregor Kemper. *A Course in Commutative Algebra*. Springer-Verlag, 2009.