Gröbnerbasen und Regularität

Vortrag 5: Hilbertreihen und Dimension

Kilian Auburger

16.11.16

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Wir möchten uns im Folgenden wieder mit der Krull-Dimension affiner Algebren beschäftigen. Wie wir bereits gesehen haben können wir mit Hilfe von Gröbnerbasenberechnung einen Algorithmus aufstellen, welcher uns die Dimension einer affinen Algebra liefert. Dabei sind jedoch sehr viele solcher Berechnungen nötig, was einen hohen Aufwand zur Folge hat. Wir wollen uns deswegen mit einem verbesserten Algorithmus beschäftigen, der Berechnungen dieser Art auf ein Minimum reduziert. Dazu werden wir Hilbertfunktionen und Hilbertreihen einführen, welche uns abschließend zu dem Begriff des Hilbertpolynoms führen werden. Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass der Grad dieses Polynoms mit der Krull-Dimension der zugehörigen affinen Algebra übereinstimmt.
Die folgenden Ausführungen stützen sich dabei komplett auf [1] Kapitel 11. Dabei werden vor allem Vorkenntnisse aus dem 9. Kapitel über Gröbnerbasen vorausgesetzt, aber auch allgemeine Grundkenntnisse aus der kommutativen Algebra, z.B. das Prinzip der Noethernormalisierung.
Zunächst werden wir die zentralen Begriffe Hilbertfunktion, Hilbertreihe und am Ende des ersten Abschnitts dann noch das Hilbertpolynom einführen und grundlegende Aussagen über diese beweisen. Im zweiten Abschnitt werden wir dann die Verbindung zu den Dimensionen affiner Algebren herstellen.

1 Das Hilbert-Serre Theorem

Im Folgenden sei K immer ein Körper.

Definition 1.1. Für ein Monom t der Form $t = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ definieren wir den Grad von t als $\deg(t) := e_1 + \cdots + e_n$. Für ein Polynom $0 \neq f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ setze

$$\deg(f) := \max\{\deg(t) | \, t \in \mathrm{Mon}(f)\}$$

und $\deg(0) := -1$.
Für ein Ideal $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ sei $A := K[x_1, \ldots, x_n]/I$, und für $d \in \mathbb{N}_0$ setze

$$A_{\leqslant d} := \{f + I | \, f \in K[x_1, \ldots, x_n], \deg(f) \leqslant d\}.$$

$A_{\leqslant d}$ ist dann ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, wie man sich leicht überzeugt. Die Funktion $h_I : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$h_I(d) := \dim_K(A_{\leqslant} d)$$

nennt man **Hilbertfunktion** von I. Die formale Potenzreihe

$$H_I(t) := \sum_{d=0}^{\infty} h_I(d) t^d \in \mathbb{Z}[[t]]$$

nennt man **Hilbertreihe** von I. Dabei müssen wir uns keine Gedanken über Konvergenzprobleme machen, da $H_I(t)$ als Element des formalen Potenzreihenrings über $\mathbb{Z}$ definiert ist.

Es wirkt naheliegend, Hilbertfunktion und Hilbertreihe einer affinen Algebra A wie folgt zu definieren: Indem man Erzeuger von A wählt und eine Darstellung der Form $A \cong K[x_1, \ldots, x_n]/I$, um dann $h_A(d) := h_I(d)$ und $H_A(t) := H_I(t)$ zu setzen. Dies hängt aber von der Wahl der Erzeugenden ab, denn wähle z.B. für $A = K[x]$ die Erzeuger x, x^2 bzw. nur x, dann erhält man als Hilbertfunktionen $2d + 1$ bzw. $d + 1$. Hilbertfunktion und Reihe sind also nicht invariant gegenüber einer affinen Algebra.

Wir möchten die Theorie der Hilbertreihen mit der Theorie der Gröbner-Basen verbinden. Wir benötigen dazu eine totale Gradordnung. Nach Definition ist dies eine Monomordnung auf $K[x_1, \ldots, x_n]$, so dass zwei Monome t, t' mit $t \leqslant t'$ auch $\deg(t) \leqslant \deg(t')$ erfüllen. Das wichtigste Beispiel hierfür ist die grevlex-Ordnung (gradiert invers lexikographische Ordnung). Für $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ bezeichne $L(I)$ wieder das Leitideal, welches von der Wahl der Monomordnung abhängt.

Beispiel 1.2. Sei $I = (x_1, \ldots, x_n)$. Dann ist $A = K$ und $h_I(d) = 1$, da $A_{\leqslant d} = K$ für alle $d \in \mathbb{N}$ und somit

$$H_I(t) = \sum_{d=0}^{\infty} t^d = \frac{1}{1-t}.$$

Proposition 1.3 (Hilbertreihe eines Hauptideals) *Sei $I = (f) \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist*

$$H_I(t) = \frac{1 - t^{deg(f)}}{(1-t)^{n+1}}, \textit{ falls } f \neq 0$$

und

$$H_I(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}, \textit{ falls } f = 0$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Fall $f = 0$. Da die Hilbertfunktion und Reihe des Nullideals von n abhängen, schreiben wir in diesem Beweis respektive $h_n(d)$ und $H_n(t)$. Induktion über n:

$n=0$: Wir erhalten $h_0(d)=1$ für alle d, somit $H_0(t)=\frac{1}{1-t}$ wie in Beispiel 1.2.
$n-1 \rightsquigarrow n$: Nutze folgende Zerlegung als direkte Summe:

$$K[x_1,\ldots,x_n]_{\leqslant d} = \bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}_0, i+j=d} K[x_1,\ldots,x_{n-1}]_{\leqslant i}\cdot x_n^j.$$

Mit dieser Zerlegung erhalten wir

$$H_n(t) = H_{n-1}(t)\cdot(\sum_{j=0}^{\infty} t^j)$$

und mit der Induktionsannahme schließlich

$$H_{n-1}(t)\cdot(\sum_{j=0}^{\infty} t^j) = H_{n-1}(t)\cdot\frac{1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}.$$

Nehme nun an, dass $f\neq 0$. Für alle $d\in\mathbb{N}_0$ gilt folgende Isomorphie

$$(K[x_1,\ldots,x_n]/(f))_{\leqslant d} \cong K[x_1,\ldots,x_n]_{\leqslant d}/(f\cdot K[x_1,\ldots,x_n]_{\leqslant d-\deg(f)})$$

und wir erhalten

$$H_I(t) = H_{\{0\}}(t) - H_{\{0\}}(t)\cdot t^{\deg(f)} = (1-t^{\deg(f)})\cdot H_{\{0\}}(t) = \frac{1-t^{\deg(f)}}{(1-t)^{n+1}}.$$

□

Bemerkung 1.4. Wir wollen die Hilbertfunktion $h_{(0)}(d)$ des Nullideals bestimmen. Da $h_{(0)}(d)$ gleich der Anzahl der Monome von höchstens Grad d ist, kann es kombinatorisch bestimmt werden. Eine andere Möglichkeit ist, die Hilbertreihe zu einer binomischen Reihe zu erweitern. Dies liefert mit dem binomischen Lehrsatz

$$H_{(0)}(t) = (1-t)^{-n-1} = \sum_{d=0}^{\infty}\begin{pmatrix} -n-1 \\ d\end{pmatrix}(-t)^d,$$

also

$$h_{(0)}(d) = (-1)^d\begin{pmatrix} -n-1 \\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+n \\ d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+n \\ n\end{pmatrix}$$

Insbesondere sehen wir, dass $h_{(0)}(d)$ durch ein Polynom vom Grad n in d gegeben ist.

Theorem 1.5 (Hilbertreihe des Leitideals) *Sei $K[x_1,\ldots,x_n]$ mit einer totalen Gradordnung ausgestattet und sei $I\subseteq K[x_1,\ldots,x_n]$ ein Ideal. Dann ist*

$$H_I(t) = H_{L(I)}(t).$$

Beweis. Sei $A := K[x_1,\ldots,x_n]/I$. Nach Theorem 9.9 induziert NF_G, wobei G eine Gröbner-Basis von I ist, eine injektive lineare Abbildung $\varphi: A\to K[x_1,\ldots,x_n]$. Für alle $d\in\mathbb{N}_0$ erhalten wir eine Restriktionsabbildung $\varphi_d: A_{\leqslant d}\to K[x_1,\ldots,x_n]_{\leqslant d}$. Sei $V_d\subseteq K[x_1,\ldots,x_n]$ der von allen Monomen t mit $\deg(t)\leqslant d$ und $t\notin L(I)$ aufgespannte Unterraum. Da alle $f\in V_d$ in Normalform bezüglich G sind, erhalten wir $f=\mathrm{NF}_G(f)=\varphi_d(f+I)$, also $V_d\subseteq\mathrm{im}(\varphi_d)$. Auf der anderen Seite erhalten wir mit Definition 9.6(b) und der Voraussetzung über die Monomordnung $\mathrm{im}(\varphi_d)\subseteq V_d$. Wir schließen dann, dass

$$h_I(d) = \dim(V_d).$$

Beobachte dann, dass die Definition von V_d nur von $L(I)$ abhängt. Also haben zwei Ideale mit dem gleichen Leitideal, auch gleiche Hilbertfunktion/-reihe. Da $L(L(I))=L(I)$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.6. Ein Polynom $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ heißt homogen, wenn alle Monome in f den gleichen Grad haben. Jedes Polynom kann also eindeutig geschrieben werden als Summe von homogenen Polynomen von paarweise verschiedenen Graden, den sogenannten homogenen Teilen. Ein Ideal heißt homogen, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird. Jedes von Monomen erzeugte Ideal ist also homogen und somit zum Beispiel auch $L(I)$ eines Ideals $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$.

Lemma 1.7 (Hilbertreihe von Summen und Schnitten von homogenen Idealen) *Seien $I, J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ homogene Ideale. Dann ist*

$$H_{I+J}(t) + H_{I\cap J}(t) = H_I(t) + H_J(t)$$

Beweis. Sei $d \in \mathbb{N}_0$. Schreibe für ein Ideal $L \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ $L_{\leqslant d} := \{f \in L | \deg(f) \leqslant d\}$. Da I und J homogen sind folgt, dass $I + J$ von homogenen Polynomen $g_1, \ldots, g_m \in I \cup J$ erzeugt wird, also kann $f \in (I + J)_{\leqslant d}$ geschrieben werden als $f = \sum_{i=1}^{m} h_i g_i$, mit $h_i \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Diese Gleichheit gilt selbst dann noch, wenn wir alle homogenen Teile vom Grad $> d-$ $\deg(f)$ eines jeden h_i löschen. Dies zeigt, dass die lineare Abbildung $I_{\leqslant d} \to (I + J)_{\leqslant d}/J_{\leqslant d}, f \mapsto f + J_{\leqslant d}$ surjektiv ist. Ihr Kern ist $(I \cap J)_{\leqslant d}$, somit gilt nach Dimensionsformel für lineare Abbildungen und Quotientenräume

$$\dim_K(I_{\leqslant d}) - \dim_K((I \cap J)_{\leqslant d}) = \dim_K((I + J)_{\leqslant d}) - \dim_K(J_{\leqslant d}).$$

Betrachte ausgehend davon die Dimension der Quotientenräume in $K[x_1, \ldots, x_n]$ und bilde Hilbertreihen, dann erhält man die Behauptung. □

Mithilfe der bisher gezeigten Aussagen ist es uns nun möglich, einen Algorithmus zur Berechnung der Hilbertreihe eines Ideals zu formulieren. Zentral werden wir dabei die Tatsache ausnutzen, dass es ausreicht die Hilbertreihe des Leitideals zu kennen.

Algorithmus 1.8 (Hilbertreihe eines Ideals)**.**

- Input: Ein Ideal $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$
- Output: Die Hilbertreihe $H_I(t)$

1. Wähle totale Gradordnung $\leqslant$ auf $K[x_1, \ldots, x_n]$ und berechne eine Gröbnerbasis von I. Seien $m_1, \ldots, m_r$ die führenden Monome der Nichtnull-Elemente in G.
2. Falls $r = 0$, gib $H_I(t) := \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$ zurück.
3. Setze $J := (m_2, \ldots, m_r)$ und $\tilde{J} := (\text{kgV}(m_1, m_2), \ldots, \text{kgV}(m_1, m_r))$.
4. Berechne $H_J(t)$ und $H_{\tilde{J}}(t)$ durch rekursives Anwenden des Algorithmus. Bemerke dabei, dass J und $\tilde{J}$ bereits durch Monome erzeugt werden, also gibt es für J und $\tilde{J}$ in Schritt 1 nichts weiter zu tun.
5. Gib $H_I(t) := \frac{1-t^{\deg(m_1)}}{(1-t)^{n+1}} + H_J(t) - H_{\tilde{J}}(t)$ zurück.

Bemerke, dass der Algorithmus nur eine Berechnung einer Gröbnerbasis erfordert. Für Berechnungen gut geeignet ist die grevlex-Ordnung, sie tendiert dazu diese am schnellsten abzuschließen.

Theorem 1.9 *Der Algorithmus endet nach endlich vielen Schritten und berechnet $H_I(t)$ korrekt.*

Beweis. Mit jeder rekursiven Ausführung des Algorithmus verkleinert sich r strikt. Dies garantiert Beendigung.
Sei $\tilde{I} := (m_1, \ldots, m_r) = L(I)$. Nach Theorem 1.5 müssen wir zeigen, dass die Schritte 2 bis 5 $H_{\tilde{I}}$ korrekt berechnen. Wir nutzen Induktion über r.
$r = 0$: Alg. endet nach Schritt 2 und ist korrekt.
$r > 0$: Per Induktionsvor. wurden $H_J(t)$ und $H_{\tilde{J}}(t)$ korrekt berechnet. Wir behaupten, dass $\tilde{J} = J \cap (m_1)$. Offensichtlicherweise liegen jedes kleinste gemeinsame Vielfache von m_1 und einem m_i in J und (m_1), somit folgt $\subseteq$. Sei nun f aus dem Schnitt. Dann ist $f = g_1 m_1$ und $f = \sum_{i=2}^{r} g_i m_i$ mit $g_1, \ldots, g_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Für jedes Monom $t \in \text{Mon}(g_1)$ existieren $i \geqslant 2$, so dass $tm_1 \in$

$\mathrm{Mon}(g_i m_i)$, also $m_i | t m_1$, da m_i selbst ein Monom ist. Dies impliziert, dass $\mathrm{kgV}(m_1, m_i) | t m_1$, somit $t m_1 \in \tilde{J}$. Wir schließen also, dass $f \in \tilde{J}$ und es folgt die Zwischenbehauptung, da f Summe solcher $t m_1$ ist.
Da $\tilde{I} = J + (m_1)$, folgt mit Lemma 1.7 und Proposition 1.3, dass

$$H_{\tilde{I}}(t) = H_{(m_1)}(t) + H_J(t) - H_{\tilde{J}}(t) = \frac{1 - t^{\deg(m_1)}}{(1-t)^{n+1}} + H_J(t) - H_{\tilde{J}}(t)$$

□

Korollar 1.10 (Hilbert-Serre Theorem) *Sei $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Dann ist die zugehörige Hilbertreihe von der Form*

$$H_I(t) = \frac{a_0 + a_1 t + \ldots a_k t^k}{(1-t)^{n+1}},$$

wobei $k \in \mathbb{N}_0$ und $a_i \in \mathbb{Z}$. Desweiteren ist $h_I(d)$ ein Polynom für große d. Genauer: Das Polynom

$$p_I := \sum_{i=0}^{k} a_i \binom{x+n-i}{n} \in \mathbb{Q}[x]$$

erfüllt

$$h_I(d) = p_I(d)$$

für genügend große d.

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage per Induktion über die Anzahl der Rekursionsschritte r in Algorithmus 1.8.
$r = 0$: Wir erhalten $H_I(t) := \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$.
$r - 1 \rightsquigarrow r$: Per Induktionsannahme sind $H_J(t)$ und $-H_{\tilde{J}}(t)$ von obiger Form. Deren Summe mit $\frac{1-t^{\deg(m_1)}}{(1-t)^{n+1}}$ liefert wieder eine solche Form.
Mit Bemerkung 1.4 und Proposition 1.3 erhalten wir, dass $\frac{1}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{d=0}^{\infty} \binom{d+n}{n} t^d$, also ist

$$H_I(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i \sum_{d=0}^{\infty} \binom{d+n}{n} t^d = \sum_{i=0}^{k} \sum_{d=i}^{\infty} a_i \binom{d+n-i}{n} t^d = \sum_{d=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\min(d,k)} a_i \binom{d+n-i}{n} t^d,$$

und wir sehen, dass die Definition von p_I obige Gleichheit für $d \geqslant k$ erfüllt. □

Definition 1.11. Das Polynom p_I aus obigem Korollar nennt man das **Hilbertpolynom** von I. Es lässt sich durch Algorithmus 1.8 und durch Anwenden des Korollars berechnen.

Man kann sich nun fragen, ob Grad, Leitkoeffizient etc. des Hilbertpolynoms eines Ideals etwas Interessantes über dieses aussagen. Darauf wird nun eingegangen.

2 Hilbertpolynome und Dimension

Lemma 2.1 (Invarianz des Grades des Hilbertpolynoms) *Seien* $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ *und* $j \subseteq K[y_1, \ldots, y_m]$ *Ideale, so dass deren* K*-Algebren* $A := K[x_1, \ldots, x_n]/I$ *und* $B := K[y_1, \ldots, y_n]/J$ *isomorph sind. Dann*

$$\deg(p_I) = \deg(p_J).$$

Beweis. Wir haben einen Isomorphismus $\varphi : A \to B$ von K-Algebren, also gibt es Polynome $g_1, \ldots, g_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$, so dass $\varphi(g_i + I) = y_i + J$. Setze $k :=\max\{\deg(g_1), \ldots, \deg(g_m)\}$. Für alle $d \in \mathbb{N}_0$ gilt $B_{\leqslant d} \subseteq \varphi(A_{\leqslant kd})$ und somit

$$\dim_K(B_{\leqslant d}) = h_J(d) \leqslant \dim_K(\varphi(A_{\leqslant kd})) = \dim_K(A_{\leqslant kd}) = h_I(kd).$$

Dies impliziert, dass p_J keinen größeren Grad als p_I haben kann (überprüfe für $d >> k$). Genauso zeigt man, dass p_I keinen größeren Grad als p_J haben kann und wir erhalten Gleichheit. □

Ist im Folgenden A eine affine K-Algebra, so können wir erzeugende Elemente $a_1, \ldots, a_n$ wählen und den Kern I der Abbildung $K[x_1, \ldots, x_n] \to A, x_i \mapsto a_i$ betrachten. Dann ist $A \cong K[x_1, \ldots, x_n]/I$ und nach obigem Lemma ist $\deg(p_I)$ unabhängig von der Wahl der Erzeuger. Um zu zeigen, dass der Grad gleich der Krull-Dimension von A ist, wollen wir Erzeuger durch Noether-Normalisierung finden.

Theorem 2.2 (Grad des Hilbertpolynoms und der Krull-Dimension) *Sei* $A \cong K[x_1, \ldots, x_n]/I$ *eine affine Algebra. Dann ist* $\deg(p_I) = \dim(A)$.

Beweis. Das Resultat ist korrekt, falls A der Nullring ist, da dann $\dim(A) = 0$ gilt, nehme also $A \neq \{0\}$ an. Durch Noether-Normalisierung (Theorem 8.19 und Theorem 8.4 in [1]) finden wir algebraisch unabhängige Elemente $c_1, \ldots, c_m \in A$ mit $m = \dim(A)$ und weitere Elemente $b_1, \ldots, b_r \in A$, so dass $A = \sum_{j=1}^r C \cdot b_j$, wobei $C := K[c_1, \ldots, c_m] \subseteq A$. Wir können annehmen, dass $b_1 = 1$. Seien $y_1, \ldots, y_m$ und $z_1, \ldots, z_r$ Variablen und sei $J \subset K[y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_r]$ der Kern der Abbildung $K[y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_r] \to A, y_i \mapsto c_i, z_j \mapsto b_j$. Nach obigem Lemma gilt $\deg(p_I) = \deg(p_J)$, also ist zu zeigen, dass $\deg(p_J) = m$. Wir schreiben

$$B_{\leqslant d} := \{f + J | f \in K[y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_r], \deg(f) \leqslant d\}$$

und

$$C_{\leqslant d} := \{f + J | f \in K[y_1, \ldots, y_m], \deg(f) \leqslant d\}.$$

Da offensichtlich $C_{\leqslant d} \subseteq B_{\leqslant d}$ für alle $d \in \mathbb{N}_0$, erhalten wir

$$h_J(d) \geqslant \dim_K(C_{\leqslant d}) = \binom{d+m}{m},$$

wobei wir algebraische Unabhängigkeit der c_i und Bemerkung 1.4 benutzt haben. Dies impliziert $\deg(p_J) \geqslant m$.
Um die umgekehrte Ungleichheit zu zeigen, beobachten wir, dass für $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant r$ das Produkt $b_i b_j$ geschrieben werden kann als $b_i b_j = \sum_{k=1}^r a_{i,j,k} b_k$ mit $a_{i,j,k} \in C$, nach Definition von C. Es existiert dann ein $e \in \mathbb{N}$, so dass $a_{i,j,k} \in C_{\leqslant e}$ für alle i, j, k. Also sehen wir, dass $b_i b_j \in \sum_{k=1}^r C_{\leqslant e} \cdot b_k$ und das Produkt aus s-vielen der b_i's in $\sum_{k=1}^r C_{\leqslant (s-1)e} \cdot b_k$ liegt. Letzteres kann man durch Induktion über $s > 0$ zeigen. Es folgt, dass

$$B_{\leqslant d} \subseteq C_{\leqslant d} \cdot b_1 + \sum_{s=1}^{d} \sum_{k=1}^{r} C_{\leqslant d-s} \cdot C_{\leqslant (s-1)e} \cdot b_k \subseteq \sum_{k=1}^{r} C_{\leqslant ed} \cdot b_k =: V_d$$

für alle $d \geqslant 0$. Wir erhalten

$$h_J(d) \leqslant \dim_K(V_d) \leqslant r \cdot \dim_K(C_{\leqslant ed}) = r \cdot \binom{ed+m}{m},$$

wobei wir wieder Bemerkung 1.4 benutzt haben. Als Polynom in d aufgefasst, hat diese obere Schranke Grad m, also $\deg(p_J) \leqslant m$. □

Da das Hilbertpolynom mithilfe von nur einer einzigen Gröbnerbasis berechnet werden kann, erhalten wir auch einen verbesserten Algorithmus um die Dimension einer affinen Algebra zu berechnen.

Korollar 2.3 (Berechnung der Dimension via Leitdeal) *Sei $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal und sei $L(I)$ das zugehörige Leitideal respektive einer totalen Gradordnung. Dann ist*

$$\dim(K[x_1, \ldots, x_n]/I) = \dim(K[x_1, \ldots, x_n]/L(I)).$$

Beweis. Folgt mit den Theoremen 1.5 und 2.2. □

Bemerkung 2.4. Das Leitdeal $J := L(I)$ ist ein Monomideal, d.h. wird erzeugt von Monomen $m_1, \ldots, m_r$. Es ist besonders einfach die Dimension von $A := K[x_1, \ldots, x_n]/J$ für ein Monomideal J zu berechnen (nutze hierfür Theorem 5.9 und Proposition 5.10 in [1]). Eine Menge $M \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ von Variablen ist algebraisch abhängig modulo J, genau dann wenn es ein Monom m_j unter den Erzeugern von J gibt in welchem nur Variablen aus M vorkommen. Also ist M algebraisch unabhängig modulo J, genau dann wenn in jedem m_j eine Variable x_i vorkommt, welche nicht in M ist. Das Komplement $\{x_1, \ldots, x_n\} \backslash M$ ist algebraisch unabhängig modulo J genau dann wenn in jedem m_j ein $x_i \in M$ vorkommt. Dies führt zu

Algorithmus 2.5 (Dimension einer affinen Algebra)**.**

- Input: Ein Ideal $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, welches eine affine Algebra $A := K[x_1, \ldots, x_n]/I$ definiert.
- Output: Die Krulldimension $\dim(A)$.

1. Wähle totale Gradordnung $\leqslant$ auf $K[x_1, \ldots, x_n]$ und berechne eine Gröbnerbasis G von I respektive $\leqslant$. Seien $m_1, \ldots, m_r$ die führenden Monome der Nichtnullelemente von G.
2. Falls $m_j = 1$ für ein j gib $\dim(A) = -1$ zurück.
3. Durch gründliche Suche finde eine Menge $M \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ minimaler Größe, so dass jedes m_j mindestens ein $x_i \in M$ umfasst.
4. Gib $\dim(A) = n - |M|$ zurück.

Wie bereits erwähnt benötigt dieser Algorithmus nur eine Berechnung einer Gröbnerbasis und dies kann mithilfe der grevlex-Ordnung durchgeführt werden. Nach dieser Berechnung ist der Algorithmus rein kombinatorisch. Es würde sich aber noch anbieten Schritt 3 zu optimieren.

Definition 2.6. Für ein echtes Ideal $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ sei $m = \deg(p_I)$ der Grad und $\mathrm{LC}(p_I)$ der Leitkoeffizient des Hilbertpolynoms. Dann nennt man $\deg(I) := m! \cdot \mathrm{LC}(p_I)$ den Grad von I.

Man kann zeigen, dass es sich bei dem Grad eines Ideals um eine positive ganze Zahl handelt und es möglich ist damit das klassische Theorem von Bezout zu zeigen. Der Grad eines Hauptideals $I = (f)$ mit $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, wobei f nicht konstant ist, ist $\deg(I) = \deg(f)$. Darüber hinaus, wenn $X \subseteq K^n$ eine endliche Menge von Punkten und $I := I(X)$ das zugehörige Ideal ist, dann ist $\deg(I) = |X|$. Am Ende ist noch zu bemerken, dass der Grad nicht invariant gegenüber einer affinen Algebra ist.

Beispiel 2.7. Wir wollen ein abschließendes Beispiel betrachten: Wir möchten dazu das Ideal $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ untersuchen, welches gegeben ist durch $I = (x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_3^2, x_2^2 x_3^2)$. Wir bestimmen dazu Hilbertreihe, Hilbertfunktion, Hilbertpolynom, $\dim(K[x_1, \ldots, x_n]/I)$ und $\deg(I)$.
Wir beginnen also mit Algorithmus 1.8

1. Wir brauchen keine Gröbnerbasis berechnen, da I selbst bereits in geeigneter Form ist (wird von Monomen erzeugt).
2. $r = 0$ ist nicht gegeben.
3. Wir setzen $J = (x_1^2 x_3^2, x_2^2 x_3^2)$ und $\tilde{J} = (x_1^2 x_2^2 x_3^2)$.

4. Der Algorithmus wird rekursiv für J durchgeführt, erhalte dann $J' = (x_2^2 x_3^2)$ und $\tilde{J}' = \tilde{J}$. Wir erhalten mit Proposition 1.3:

$$H_{J'}(t) = \frac{1-t^4}{(1-t)^4} \text{ und } H_{\tilde{J}}(t) = \frac{1-t^6}{(1-t)^4} \text{ , also } H_J(t) = \frac{1-2t^4+t^6}{(1-t)^4}$$

5. Und insgesamt

$$H_I(t) = \frac{(1-t^4)+(1-2t^4+t^6)-(1-t^6)}{(1-t)^4} = \frac{1-3t^4+2t^6}{(1-t)^4}$$

Damit ist es uns nun möglich das Hilbertpolynom aufzustellen:

$$p_I = \frac{1}{6}\cdot(x+3)(x+2)(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{1}{3}(x-3)(x-4)(x-5) = 12x - 16$$

Man kann zeigen, dass $h_I(d) = p_I(d)$ für $d > 2$, außerdem mit Korollar 1.10 $h_I(0) = 1, h_I(1) = 4, h_I(2) = 10$. Mit p_I erhält man abschließend $\dim(K[x_1, x_2, x_3]/I) = 1$ und $\deg(I) = 12$.
Wir wollen der Vollständigkeit halber auch noch Algorithmus 2.5 zur Berechnung der Dimension verwenden.

1. Wieder ist hier nichts zu tun.
2. Auch dieser Fall tritt nicht ein.
3. Es gibt 3 Möglichkeiten M zu wählen, nämlich $\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}$. In jedem Fall gilt dann natürlich $|M| = 2$.
4. $\dim(K[x_1, x_2, x_3]/I) = 3 - 2 = 1$.

Literatur

[1] G. Kemper. *A Course in Commutative Algebra.* Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN: 9783642035456.