Prof. Dr. Moritz Kerz
Anna Fluder
Universiät Regensburg

Seminar über Projektive Geometrie

WINTERSEMESTER 13/14

Die projektive Geometrie hat ihre Ursprünge in der Renaissance. Ausgehend von optischen Untersuchungen arabischer Mathematiker suchten Renaissance-Künstler nach einer Maltechnik, die dem Auge den Eindruck von Dreidimensionalität vermitteln sollte, das sogenannte perspektivische Zeichnen. Dazu interessiert man sich für Eigenschaften von Objekten, die unter einem Perspektivwechsel unverändert bleiben: Die Kollinearität einer Menge von Punkten ist ein Beispiel einer solchen Eigenschaft, während Winkel und Längen sich ändern können. Der Formalismus der projektiven Geometrie macht die Untersuchung solcher Eigenschaften möglich. In der modernen Mathematik zeigt sich die Effektivität dieses Formalismus besonders in der algebraischen Geometrie. In der zweiten Hälfte des Seminars werden wir auch einige elementare Grundideen der algebraischen Geometrie kennenlernen.

Inhalt: Der zentrale Begriff der projektiven Geometrie ist der des projektiven Raums. Man kann sich einen projektiven Raum vorstellen als Erweiterung eines Vektorraums um zusätzliche Elemente (die man als "*Punkte im Unendliche*" bezeichnet). Wir werden diese Sichtweise im Seminar präzisieren und andere Ansätze diskutieren. Wir werden auch geometrische Fragen über projektive Räume behandeln. Unter anderem beweisen wir die klassischen Sätze von Desargues, Pappus und behandeln die Kegelschnitte und Quadriken vom projektiven Standpunkt. Am Ende werden wir die algebraische Theorie der rationalen Kurven einführen.

Literatur:

- ⋆ Pierre Samuel; "Projective Geometry"
- ⋆ Nigel Hitchin; "*Lecture notes/ Projective geometry*"

  `http://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinnotes/hitchinnotes.html`

Anmeldung: per Email an Anna.Fluder@uni-r.de

Zielgruppen: Bachelor, Lehramt Gymnasium

Programm

1. **Projektiver Raum, projektive Transformationen**
   ([H] 2.1 -2.3 Thm.3]

2. **Sätze von Desargues und Pappus, Dualität**
   ([H] 2.3 Thm. 4 - 2.4)

3. **Affine Räume und projektive Vervollständigung, Fundamentalsatz der projektiven Geometrie**
   ([S] Abschnitt 1.3 bis Seite 10 und Thm. 7.)

4. Definition Algebraische Teilmengen des projektiven und affinen Raumes, Anzahl der Punkte über endlichen Körpern, projektiver Abschluss einer algebraischen Menge des affinen Raumes, einfache und singuläre Punkte von Hyperflächen
   ([S] Seite 5, Abschnitt 1.3 Seiten 11-16)

5. **Axiomatischer Zugang zur projektiven Geometrie**
   ([S] Abschnitt 1.4)
   Präsentrieren Sie soviel wie möglich vom Beweis des grundlegenden Thm. 8.

6. **Büschel von Kreisen**
   ([S] Abschnitt 1.6)

7. **Büschel von Koniken**
   ([S] Abschnitt 1.7 und [H] Abschnitt 3.5)

8. **Alternierendes Produkt (multilineare Algebra)**
   ([H] Abschnitte 4.1 - 4.2)

9. **Die Kleinsche Quadrik**
   ([H] Abschnitte 4.3 - 4.4)

10. **Doppelverhältnis und Verhalten unter Permutationen, rationale Abbildungen**
    ([S] Abschnitte 2.1 - 2.2)

11. **Harmonische Division und Involutionen**
    ([S] Abschnitte 2.3 - 2.4]

12. **Rationale algebraische Kurven I**
    ([S] Abschnitt 2.5)
    Beweisen Sie die Sätze über die Geometrie der Koniken als rationale Kurven

13. **Rationale algebraische Kurven II**
    ([S] Abschnitt 2.6)
    In diesem Vortrag soll ein Ausblick auf die Theorie der rationalen Kurven gegeben werden. Sie können selbst den Inhalt aus Abschnitt [S] 2.6 zusammenstellen. Erklären Sie möglichst ausführlich den Satz von Lüroth.