Oberseminar Wintersemester 2011/12:

Arithmetische Dualität in positiver Charakteristik

Di 16–18 Uhr im M 103

Uwe Jannsen, Moritz Kerz

Im Oberseminar werden wir uns mit der Dualität konstruierbarer étaler Garben über endlichen Körpern beschäftigen. Wir interessieren uns dabei für den Fall, dass die Garbe eine p-primäre Torsionsgarbe ist, wobei p die Charakteristik des Grundkörpers ist. Für eine konstruierbare étale $\mathbb{Z}/m$-Garbe $\mathcal{F}$ auf einer glatten projektiven Varietät $X \to \mathbb{F}_p$ mit m prim zu p hat man eine klassische Dualität von étalen Kohomologiegruppen, d.h. eine perfekte Paarung von endlichen Gruppen,

$$H^i(X, \mathcal{F}) \times \mathrm{Ext}^{2d+1-i}_{X,\mathbb{Z}/m}(\mathcal{F}, \mu_m^{\otimes d}) \to H^{2d+1}(X, \mu_m^{\otimes d}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{Z}/m, \tag{1}$$

wobei d die Dimension von X ist [11, Exp. XVIII].

Ziel des Oberseminars ist es, Analoga dieser Dualität für $m = p^n$ zu studieren. Wie werden dabei hauptsächlich einer Arbeit von Moser [10] folgen. Danach wollen wir den Zusammenhang mit Grothendieck's 6-Funktor-Formalismus [7] und dem Blochschen Zykelkomplex [3] kennenlernen.

Die Idee im Fall $m = p^n$ ist, die dualisierende Garbe $\mu_m^{\otimes d}$ durch die étale Garbe der logarithmischen de Rham-Witt-Formen $\nu^d_{n,X}$ zu ersetzen, die durch dlog von Teichmüllerlifts von $(\mathcal{O}_X^\times)^{\otimes d}$ erzeugt wird. Dazu beginnen wir das Oberseminar mit dem Studium der de Rham-Witt-Formen. Tatsächlich ist es für Mosers Beweisstrategie entscheidend, auch eine Verallgemeinerung von $\nu^d_{n,X}$ auf singuläre Schemata zu besitzen. Diese konstruiert man mit Hilfe eines Gerstenkomplexes für logarithmische de Rham-Witt-Formen.

Das Seminar beginnt am 18.10. mit einem Übersichtsvortrag und der Einteilung der Vorträge. Alle Interessierten sind herzliche eingeladen.

Vorträge:

1: Übersichtsvortrag (Uwe Jannsen)

2: De Rham-Witt I

Wiederholung Ring der Witt–Vektoren [6, Ab. 0.1], Cartier–Isomorphismus [6, Ab. 0.2.1], erste Eigenschaften des de Rham–Witt Komplexes [6, Ab.

I.1] bis Définition 1.4.

3: De Rham-Witt II
Konstruktion und Eigenschaften des de Rham–Witt Komlexes [6, Ab. I.1–3]

4: Log de Rham-Witt und Satz von Bloch–Kato
Definition log de Rham-Witt Garbe [6, I.5.7], Milnor K-Theorie [4, Kap. 7], Satz von Bloch [6, Thm. 0.2.4.2] (für $S = \operatorname{Spec} k$) und Satz von Bloch–Kato [4], [1, Thm. 2.1, Cor. 2.8] mit Beweisidee

5: Gersten Auflösung
Konstruktion Gersten–Komplex, Gersten–Vermutung für log de Rham–Witt Garben [5], [10, Ab. 1].

6: Reinheit und Satz von Kato–Kazumaki
Reinheit für $\tilde{\nu}^r_{n,X}$, dazu die nötigen Argumente aus [8] ziehen

7: Konstruktion der Spur
Kohomologie mit kompaktem Träger (wieder einige Argumente aus [8] übernehmen) und Konstruktion der Spur [10, Ab. 3,4]

8a: Milnes Dualitätssatz
Dualitätsatz für $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/p^n$ nach Milne [9]

8b: Mosers Dualitätssatz
Formulierung und Beweis des Dualitätssatzes von Moser [10, Ab. 5]

9: Dualität nach SGA4
Konstruktion von $f^!$ für einen Morphismus f und Vergleich von Mosers Komplex $\tilde{\nu}^r_{n,X}$ mit $f^!\,\mathbb{Z}/p^n$ für $f : X \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ nach Jannsen–Saito–Sato [11, Exp. XVIII], [7]

10: Blochs Zykelkomplex
Konstruktion von Bloch's Zykelkomplex [2], besonders Abschnitte 1.3.1 und 1.3.2.

11: Geissers Dualitätssatz
Übersicht über [3]

Literatur

[1] Bloch, S.; Kato, K. *p-adic étale cohomology.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No. 63 (1986), 107–152.

[2] Geisser, T. *Motivic cohomology, K-theory and topological cyclic homology.* Handbook of K-theory. Vol. 1, 2, 193–234, Springer, Berlin, 2005.

[3] Geisser, T. *Duality via cycle complexes.* Ann. of Math. (2) 172 (2010), no. 2, 1095–1126.

[4] Gille, P.; Szamuely, T. *Central simple algebras and Galois cohomology.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 101. Cambridge University Press.

[5] Gros, M.; Suwa, N. *La conjecture de Gersten pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmique.* Duke Math. J. 57 (1988), no. 2, 615–628.

[6] Illusie, L. *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 12 (1979), no. 4, 501–661.

[7] Jannsen, J.; Saito, S.; Sato, K. Étale Duality for Constructible Sheaves on Arithmetic Schemes

[8] Kato, K.; Kuzumaki, T. *The dimension of fields and algebraic K-theory.* J. Number Theory 24 (1986), no. 2, 229–244.

[9] Milne, J. *Duality in the flat cohomology of a surface.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 9 (1976), no. 2, 171–201.

[10] Moser, T. *A duality theorem for étale p-torsion sheaves on complete varieties over a finite field.* Compositio Math. 117 (1999), no. 2, 123–152.

[11] SGA4 *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* 1963–1964 , Lecture Notes in Mathematics 269, 270 and 305, 1972/3.

Kontakt: moritz.kerz@mathematik.uni-r.de