Seminar Sommersemester 2012:

Quadratische Formen

Di 14 - 16 Uhr im Raum TBA
Prof. Dr. Moritz Kerz

Inhalt:
Im Seminar beschäftigen wir uns mit der algebraischen Theorie der quadratischen Formen über Körpern und deren Anwendung auf Summen von Quadraten. Zum Beispiel wollen wir uns im Seminar ausführlich mit Hilberts 17tem Problem beschäftigen, das besagt, dass eine reelle rationale Funktion, die keine negativen Werte annimmt, Summe von Quadraten von rationalen Funktionen sein muss.

Dies wurde von E. Artin 1927 bewiesen. A. Pfister gelang es 1967 eine quantitative Verschärfung dieses Satzes zu beweisen, es ist nämlich jede solche rationale Funktion in n Variablen Summe von 2^n Quadraten von rationalen Funktionen.

Eine wichtige Technik, die wir studieren wollen, ist es, die gesamten quadratischen Formen über einem gegebenen Körper k zum sogenannten Wittring $W(k)$ zusammenzufassen, d.h. man führt eine Operation der Addition und Multiplikation auf einem gewissen Raum aller quadratischer Formen ein. Ein wichtiges Ziel des Seminars ist es, $W(k)$ für verschiedene spezielle Körper k zu studieren. Zum Beispiel werden wir ausführlich die Theorie formal reeller Körper diskutieren.

Vorkenntnisse:
Lineare Algebra I, II und Algebra I

Vorträge:

1: Grundlagen (Louisa Podlawski)

Definition von quadratischen Formen und zugehörigen Bilinearformen (in Charakteristik ungleich zwei), Grundbegriffe, Pfister's Hauptsatz.
[P] Abschnitte 1.1, 1.2.

2: Subformensatz, Witts Kürzungssatz, Wittring (Elisabeth Bleicher)

[P] Abschnitte 1.3 und 2.1

3: Pfisterformen (Claudia Wagner)

Multiplikative Formen, Pfisterformen, Fundamentalideal im Wittring, Formulierung der Milnorvermutung
[P] Abschnitte 2.2, 2.3

4: Quadratische Formen unter endlichen Erweiterungen (Strohhofer Margit)

Es soll das Verhalten von quadratischen Formen unter endlichen Körpererweiterungen studiert werden: Springers Satz und quadratische Erweiterungen (für letztere muss der Transfer eingeführt werden).
[P] Theorem 1.12 und [L] Abschnitte VII.2 und VII.3

5: Funktionenköper von quadratischen Formen (Maximilian Vollath)

Definition und algebraische Eigenschaften des Funktionenkörpers einer quadratischen Form. Darstellung des notwendigen Kriteriums dafür, dass eine Form über

einem Funktionenkörper hyperbolisch wird (Theorem X.4.5 aus [L])
[L] Abschnitt X.3 komplett, Abschnitt X.4 bis Corollary 4.10.

6: Hauptsatz von Arason-Pfister ()

Beweis des Hauptsatzes von Arason Pfister über die Potenzen des Fundamentalideals.

Zusammen mit den in Vortrag 3 skizzierten Invarianten (Milnorvermutung) ergibt sich im Prinzip eine vollständige Beschreibung des Wittrings eines Körpers.
[L] Abschnitt X.4 Theorem 4.11 und Abschnitt X.5 ausführlich bis Theorem 5.6 und grobe Darstellung des "gapPhänomens Theorem 5.20.

7: Die Stufe eines Körpers/Rings (Ramona Schiller)

Die Stufe eines Körpers k ist die kleinste Zahl n (oder unendlich), so dass $-1 \in k$ als Summe von n Quadraten geschrieben werden kann.
[P] Abschnitte 3.1 und 3.2

8: Formal reelle Körper (Ursula Neumann)

Es soll die Theorie der formal reellen Körper und ihres reellen Abschlusses entwickelt werden. Ein formal reeller Körper ist ein Körper k, in dem -1 nicht die Summe von Quadraten ist.
[P] Abschnit 6.1 (ohne Springers Theorem 1.12) und [L] Abschnitte VIII.1, VIII.2

9: Hilbert's 17tes Problem (Alexander Schiller)

Es soll die quantitative Lösung durch Artin und Pfister für Hilberts 17tes Problem (siehe oben) diskutiert werden.
[P] Abschnitte 6.2, 6.3

10: Pfisters lokal-global Prinzip (Sabrina Habler)

Pfisters lokal-global Prinzip beschreibt die Torsionsuntergruppe des Wittrings $W(k)$ unter Benutzung der Gesamtheit der formal reellen Strukturen auf k.
[L] Abschnitt VIII.3

11: Pythagoraszahl (Stefanie Reichinger)

Die Phythagoraszahl $p(k)$ eines Körpers k ist die kleinste Zahl n, so dass jede Summe von Quadraten in k als Summe von nur n Quadraten geschrieben werden kann. Zum Beispiel gilt mit algebraisch unabhängigen Variablen $X_1, X_2, \ldots$, dass

$$\begin{aligned} p(\mathbb{Q}) &= 4 \qquad \text{(Lagrange)} \\ p(\mathbb{Q}(X_1)) &= 5 \qquad \text{(Pourchet)} \\ p(\mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_m)) &\leq 2^{m+1} \qquad \text{(Jannsen)} \quad \text{für } m \geq 2 \end{aligned}$$

[P] Abschnitte 7.1, 7.2

12: (Christian Dahlhausen)

Literatur

[L] Lam, T. *Introduction to quadratic forms over fields.* Graduate Studies in Mathematics, 67. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[P] Pfister, A. *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 217. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Kontakt: moritz.kerz@mathematik.uni-r.de