Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Moritz Kerz
Tobias Sitte

SS12

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen

Blatt 6

Aufgabe (1):
Bestimme die Periodenpaarung $\pi_1(X) \times \Omega(X) \to \mathbb{C}$ für einen Torus X.
Tipp: $\pi_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *und* $\dim_{\mathbb{C}} \Omega(X) = 1$. *Betrachte die universelle Überlagerung* $\pi : \mathbb{C} \to X = \mathbb{C}/\Gamma$ *mit* $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ *und wähle als Basis von* $\pi_1(X)$ *die Bilder der Wege von* 0 *nach* ω_1 *bzw.* ω_2. *Wähle als Basis von* $\Omega(X)$ *die Form* ω *mit* $\pi^*\omega = dz$.

Aufgabe (2):
Sei X eine Riemannsche Fläche, $c : [0,1] \to X$ ein Weg und $f \in \mathcal{M}(X)$, so dass f keine Null- oder Polstellen auf dem Bild von c hat. Wir nehmen an $f(c(0)) = f(c(1))$. Zeige

$$\int_c \frac{df}{f} \in 2\pi i\,\mathbb{Z}.$$

Aufgabe (3):
Sei $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $X = \mathbb{C}/\Gamma$ der zugehörige Torus. Zeige, dass für $f \in \mathcal{M}(X)$ gilt

$$\sum_{a \in X} \operatorname{ord}_a(f)\, a = 0 \qquad \text{in } X.$$

Tipp: Wende den klassischen Residuensatz auf die Funktion $zf'(z)/f(z)$ *und das Parallelogramm* $(b, b+\omega_1, b+\omega_1+\omega_2, b+\omega_2)$ *als Integrationsweg an (für geeignetes* $b \in \mathbb{C}$*). Verwende Aufgabe 2.*