Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Moritz Kerz
Tobias Sitte SS12

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen

Blatt 4

Aufgabe (1):
Sei X ein topologischer Raum und $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben (von abelschen Gruppen) über X. Zeige: Falls für jeden Punkt $a \in X$ die Abbildung auf den Halmen $\phi_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{G}_a$ ein Isomorphismus ist, so ist ϕ ein Isomorphismus.

Aufgabe (2):
Sei $X = \mathbb{C}/\Gamma$ ein komplexer Torus. Zeige, dass es keine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ gibt, die nur eine einzige Polstelle hat und an dieser einen Pol erster Ordnung.

Aufgabe (3):
Seien X, Γ wie in Aufgabe (2). Zeige:

(a) Die Reihe
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$
konvergiert auf $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ lokal-gleichmäßig.

(b) Die Funktion $\wp$ induziert eine meromorphe Funktion auf X, die nur eine einzige Polstelle (zweiter Ordnung) bei 0 hat.

(c) Jede meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X) \cap \mathcal{O}(X \setminus \{0\})$ mit einer Polstelle höchstens zweiter Ordnung bei 0 ist von der Form $c_1\wp(z) + c_2$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.