Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Moritz Kerz
Tobias Sitte

SS12

# Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen

Blatt 11

---

**Aufgabe (1)**:
Sei $X$ eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeige, dass es einen Isomorphismus $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\simeq} H^1(X, \mathcal{O}^\times)$ gibt.

*Tipp: Benutzte die exakte Sequenz*

$$0 \to \mathcal{O}^\times \to \mathcal{M}^\times \to \mathcal{D} \to 0,$$

*wobei $\mathcal{D}$ wie in Aufgabe 2 Blatt 9 sei.*

**Aufgabe (2)**:
Sei $X$ kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ und $f : X \to \mathbb{P}^1$ eine verzweigte Überlagerung vom Grad 2. Solch eine Riemannsche Fläche nennt man hyperelliptisch. Zeige:

(a) Die zu $f$ gehörige Erweiterung von Funktionenkörpern ist von der Form $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(t) \subset \mathbb{C}(t, \sqrt{P(t)}) = \mathcal{M}(X)$, wobei $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ vom Grad $d > 1$ ist und nur einfache Nullstellen hat.

(b) Das Geschlecht von $X$ ist $g = (d-1)/2$, falls $d$ ungerade, und $g = d/2$, falls $d$ gerade. (Benutze die Riemann-Hurwitz-Formel und verwende, dass die Summe der Verweigungsordnungen von $f$ gerade sein muss.)

(c) Die 1-Formen
$$\frac{t^{j-1}dt}{\sqrt{P(t)}} \in \Omega(X \setminus P^{-1}(0))$$
setzen sich zu holomorphen 1-Formen auf ganz $X$ fort für $1 \leq j \leq g$ und bilden eine $\mathbb{C}$-Basis von $\Omega(X)$.

(d) Sei $g \geq 2$. Die verzweigten Punkte von $f$ sind genau die Punkte $P \in X$ mit $h^0(2P) = 2$. Insbesondere hängen diese Punkte nur von $X$ ab und nicht von $f$. Man nennt sie Weierstrasspunkte.

*Tipp: Dies sind genau die Punkte mit* $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega(-2P)) = g - 1$. *Benutze (c).*