Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik SS12
Prof. Dr. Moritz Kerz
Tobias Sitte

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen

Blatt 10

Aufgabe (1):
Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige, dass es eine normale Untergruppe $H_1 \subset G$ von endlichem Index gibt mit $H_1 \subset H$.

Aufgabe (2):
Seien $f_1, f_2 : Y \to X$ ein Morphismen von Riemannschen Flächen mit X kompakt. Zeige, dass $f_1^* = f_2^* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ impliziert, dass $f_1 = f_2$ ist.

Bemerkung: Dies ist auch richtig für X nicht kompakt, aber mit uns zur Verfügung stehenden Mitteln nicht beweisbar.

Aufgabe (3):
Seien $Y_1 \to X$ und $Y_2 \to X$ verzweigte (endliche) Überlagerungen von kompakten Riemannschen Flächen. Zeige, dass es zu jedem Körperhomomorphismus $\alpha : \mathcal{M}(Y_2) \to \mathcal{M}(Y_1)$ über $\mathcal{M}(X)$ einen Morphismus von Riemannschen Flächen $f : Y_1 \to Y_2$ gibt mit $f^* = \alpha$.

Tipp:
1. Schritt: Zeige es für den Fall, dass die Anzahl der Morphismen $Y_1 \to Y_2$ über X gleich $\deg(Y_2/X)$ ist.
2. Schritt: Finde eine (endliche) verzweigte Galois Überlagerung $Y_1' \to Y_1$, so dass die Anzahl der Morphismen von $Y_1' \to Y_2$ gleich $\deg(Y_2/X)$ ist.
3. Schritt: Benutze, dass ein Morphismus $Y_1' \to Y_2$ genau dann über Y_1 faktorisiert, wenn der Morphismus unter der Operation von $\mathrm{Aut}(Y_1'/Y_1)$ fixiert wird. Genauso gilt: Ein Körpermorphismus $\mathcal{M}(Y_2) \to \mathcal{M}(Y_1')$ faktorisiert genau dann über $\mathcal{M}(Y_1)$, wenn der Körpermorphismus durch $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}(Y_1')/\mathcal{M}(Y_1)) \cong \mathrm{Aut}(Y_1'/Y_1)$ fixiert wird. Letztere Isomorphie folgt aus Schritt 1.