Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik SS12
Prof. Dr. Moritz Kerz
Tobias Sitte

Übungen zur Vorlesung Riemannsche Flächen

Blatt 1

Aufgabe (1):
Zeige, dass die stereographische Projektion $\sigma : S^2 \to \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die gegeben wird durch

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{1-x_3}(x_1, x_2) & \text{für} \quad x_3 \neq 1 \\ \infty & \text{für} \quad x_3 = 1 \end{cases},$$

ein Homöomorphismus ist.
Zeige mit Hilfe der höherdimensionalen stereographischen Projektion, dass $S^n \backslash \{(0, \dots, 0, 1)\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe (2):
Sei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Zeige, dass die Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

auf $\{z \in \mathbb{C} | cz + d \neq 0\}$ sich zu einer biholomorphen Abbildung $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ fortsetzt.

Aufgabe (3):
Zeige, dass S^1 nicht homöomorph zu $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) | x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ ist für $n \neq 1$.